LE CISAILLEMENT DANS LE BÉTON ARMÉ

T. GODYCKI - ĆWIRKO



DUNOD

TADEUSZ GODYCKI-ĆWIRKO
Docteur-ès-sciences
Professeur à la Faculté du Génie civil
Ecole Polytechnique de Łódź

LE CISAILLEMENT DANS LE BÉTON ARMÉ

Traduit par
ANDRZEJ M. BRANDT
Docteur-ès-sciences
Professeur adjoint à l'Académie Polonaise des Sciences

Traduction vérifiée par
STANISŁAWA LAZAROWA
Docteur

DUNOD
PARIS
1972

Traduction de l'ouvrage polonais:
ŚCINANIE W ŻELBECIE
Arkady, Warszawa 1968

AVANT-PROPOS

C'est dans la troisième décennie de ce siècle qu'ont été jetées, par E. MÖRSCH, les bases théoriques du calcul des zones d'éléments en béton armé soumises simultanément à un moment fléchissant et à un effort tranchant. Dans la théorie d'ensemble du béton armé cette étude représentait, à l'époque, un succès remarquable et incontestable, et certaines parties sont encore valables et utiles aujourd'hui. Toutefois, plusieurs constatations et indications de MÖRSCH doivent être modifiées et complétées, ne serait-ce que pour tenir compte des changements survenus dans la technologie d'exécution du béton et du béton armé. Depuis, la théorie de la flexion a évolué, la méthode des contraintes linéaires ayant fait place à celle des états limites. Seule la théorie classique du cisaillement a résisté aux épreuves du temps, et elle est restée à la base des calculs dans la plupart des pays d'Europe et d'Amérique.

Actuellement, on observe dans ce domaine une tendance presque générale à une évolution, parfois très profonde. Malheureusement, et malgré la participation des autorités les plus compétentes, les propositions pour modifier la méthode classique manquent encore de concordance, quand elles ne divergent pas complètement.

Il s'avérait donc nécessaire de résumer le problème du cisaillement des pièces en béton armé et de représenter, d'une façon relativement brève mais complète, l'état actuel de nos connaissances en ce domaine. C'est ce qu'a tenté l'auteur dans la première partie de ce livre, avant de proposer les conclusions et les recommandations pour le calcul, formulées par lui-même et fondées sur ses études personnelles ainsi que sur les essais des autres chercheurs.

Etant données l'étendue des études théoriques et expérimentales effectuées et la divergence de leurs résultats, la tâche abordée était trop vaste pour qu'une seule personne pût la remplir d'une façon entièrement satisfaisante. Bien que plusieurs questions présentées ici soient encore discutables et qu'elles ne puissent être tranchées définitivement avant plusieurs années, l'auteur espère que le présent ouvrage permettra de mieux comprendre le comportement effectif des structures en béton armé et, par conséquent, de les calculer de manière plus rationnelle.

L'auteur tient à évoquer ici la mémoire du regretté Professeur Bronislaw BUKOWSKI, dont la compétence fit autorité dans le domaine du béton armé en Pologne, et qui voulut bien, il y a quelques années, lui signaler l'intérêt du problème du cisaillement.

Tadeusz Godycki-Ćwirko

NOTE DU TRADUCTEUR

Les notations employées dans l'ouvrage original en langue polonaise sont sensiblement différentes de celles utilisées dans les livres et les documents techniques en France. Par conséquent, il a paru nécessaire de modifier les notations pour les adapter mieux aux habitudes des lecteurs français. Ces modifications sont basées sur le système de notations présenté dans l'Annexe D aux Règles pour le Calcul et l'Exécution des Constructions en Béton Armé (*Règles B.A.* 1960), *publiées par La Documentation Technique du Bâtiment et des Travaux Publics en mars* 1961.

Ainsi, les notations utilisées dans le présent ouvrage sont soit empruntées directement aux Règles B.A. 1960, *soit inspirées par celles-ci quant à l'emploi des symboles et des indices.*

Il est à remarquer que les notations adoptées dans les Règles B.A. 1960 *sont celles retenues par le Comité Européen du Béton* (*C.E.B.*) *dans les Recommandations rédigées en 1970.*

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

Efforts

P — force concentrée extérieure de la surcharge

P_{rf1} — force concentrée extérieure, correspondant à l'ouverture d'une première fissure oblique

P_f — force correspondant à l'ouverture d'une première fissure

P_g — force correspondant au glissement dans l'ancrage de l'armature principale au-dessus de l'appui

P_u — force de rupture

T — effort tranchant

T^N — effort tranchant réglementaire, qui apparaît sous la charge d'exploitation

$T_u = T_{max}$ — effort tranchant de rupture (maximal), déterminé expérimentalement

T_f — effort tranchant de fissuration

T^k — valeur de l'effort tranchant, au-dessous de laquelle on n'emploie que l'armature transversale du volume minimal

T^k_{max} — valeur de l'effort tranchant, dont le dépassement exige l'augmentation de l'aire de la section transversale, conformément aux règles en vigueur

N_b — résultante des efforts de compression dans le béton

N_{bx} — résultante des efforts de compression dans le béton, parallèle à l'axe de l'élément (l'axe des x)

N'_a — effort de traction de l'armature principale

N'_{ax} — effort de traction de l'armature principale, parallèle à l'axe des x

N'_{axi} — effort de traction dans la barre i de l'armature principale parallèle à l'axe des x

N'_{ay} — résultante des efforts dans les étriers verticaux, traversés par une fissure oblique

N'_{ay1} — effort dans les étriers verticaux, situés dans un plan

N'_0 — résultante des efforts dans les barres relevées ou dans les étriers obliques, traversés par une fissure oblique

N'_{01} — effort dans les barres relevées, situées dans un plan

V_b — partie de l'effort tranchant transmise à la zone comprimée du béton

V_a — composante verticale de l'effort N'_a

$N = \int \tau_0 b_0 \mathrm{d}x$ — effort oblique total de traction

N_s — effort oblique de traction, correspondant à la distance où l'on détermine le cisaillement

q_y — effort tranchant, rapporté à l'unité de longueur de l'élément et transmis aux étriers verticaux

$q_{max} = \dfrac{T_{max}}{bh\sigma_{cyl}}$ — effort tranchant réduit ultime

$q_f = \dfrac{T_f}{bh\sigma_{cyl}}$ — effort tranchant réduit de fissuration

Moments fléchissants

M^0 — moment fléchissant de calcul

M_u — moment fléchissant ultime réel

M_u^0 — moment fléchissant ultime de calcul

M_{cu} — moment de cisaillement ultime réel

M_{cu}^0 — moment de cisaillement ultime de calcul

$m_{cu} = \dfrac{M_{cu}}{bh^2\sigma_{cyl}}$ — moment de cisaillement ultime réduit

$m_{cu(k)} = \dfrac{M_{cu}}{bh^2\sigma_{wu}}$ — moment de cisaillement ultime réduit, rapporté à la résistance sur cube

m_u^0 — moment ultime réduit de calcul

$m_F = m_f = \dfrac{M_f}{bh^2\sigma_{cyl}}$ — moment de fissuration réduit

Contraintes

σ_x — contrainte normale suivant l'axe des x

σ_y — contrainte normale suivant l'axe des y

σ_z — contrainte normale suivant l'axe des z

τ_{xy} — contrainte de cisaillement suivant l'axe des y dans le plan perpendiculaire à l'axe des x

τ — contrainte de cisaillement en général

$\tau_{0\,max} = \tau_n = \dfrac{T_{max}}{b_0 z}$ — contrainte maximale de cisaillement dans l'âme d'une section en forme de T, de double T ou dans une section rectangulaire avec $T = T_{max}$

$\tau_0 = \dfrac{T}{b_0 z}$ — contrainte de cisaillement dans l'âme d'une section en forme de T, de double T ou dans une section rectangulaire, avec $T < T_{max}$

$\tau_{fu\,1}$ — contrainte de cisaillement correspondant à l'apparition d'une première fissure oblique

τ_0^1 — contrainte de cisaillement au-dessous de laquelle on n'emploie que l'armature transversale minimale

$\tau_{0\,max}^1$ — contrainte de cisaillement dont le dépassement exige l'augmentation de l'aire de la section transversale, conformément aux règles en vigueur

τ_d — contrainte d'adhérence entre le béton et l'armature

τ_g^0 — contrainte de cisaillement de calcul, correspondant au glissement de l'armature principale

τ_G — contrainte limite de cisaillement, déduite des hypothèses de rupture

σ_1 — contrainte principale maximale

σ_2 — contrainte principale moyenne dans l'état tri-dimensionnel, ou minimale dans l'état plan de contrainte

σ_3 — contrainte principale minimale dans l'état tri-dimensionnel de contrainte

$\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ — contraintes principales réduites

$\sigma_{t0}^0 = \dfrac{\tilde{\tau}}{\overline{\omega}_v}$ — contraintes des étriers, calculées d'après la méthode classique

σ_a^0, σ_a — contraintes de calcul et réelle de l'armature principale

$\sigma_{te}^0, \sigma_{te}$ — contraintes de calcul et réelle des étriers

$\sigma_{ar}^0, \sigma_{ar}$ — contraintes de calcul et réelle des barres relevées

σ_b' — contrainte de traction du béton

σ_b — contrainte de compression du béton

σ_{br} — contrainte de béton de la fibre la plus comprimée d'une poutre

Résistances

σ_{cyl}^0 — résistance à la compression du béton, mesurée sur cylindres de Ø 16 cm

σ_{cyl} — résistance à la compression du béton, mesurée sur cylindres de Ø 15 cm et $h_t = 30$ cm (conformément à la règle américaine) $\sigma_{cyl} \approx \sigma_{pr}$

σ_{wu} — résistance à la compression du béton, mesurée sur cubes $20 \times 20 \times 20$ cm

σ_{pr} — résistance à la compression du béton, mesurée sur prismes

$\bar{\sigma}_b$ — résistance à la compression du béton dans un élément fléchi

$\bar{\tau}_b$ — résistance au cisaillement du béton

τ_b — résistance au cisaillement pur du béton (torsion)

$\tau_{b'}$ — résistance au cisaillement du béton dans le plan soumis également à des contraintes normales

σ_{bk} — résistance du béton à la compression uniforme bi-axiale

Q_a' — limite d'élasticité en traction de l'armature principale

Q_a — limite d'élasticité en compression de l'armature longitudinale

Q_{ae} — limite d'élasticité des étriers

Caractéristiques mécaniques des matériaux

E_{b0} — module d'élasticité du béton pour les contraintes voisines de zéro
E_b — module d'élasticité du béton pour les contraintes de compression
E'_b — module d'élasticité du béton pour les contraintes de traction
m — nombre de POISSON
$\nu = \frac{1}{m}$ — coefficient de POISSON
E_a — module d'élasticité de l'acier

Caractéristiques géométriques

A_b — aire de la section transversale d'un élément en béton
b — largeur de la section rectangulaire d'une poutre
b_0 — épaisseur de l'âme d'une section en forme de T ou de double T
b_1 — largeur de la table associée d'une section en forme de T
$b_r = b\eta_0$ — largeur réduite
h_0 — épaisseur de la table de compression d'une section en forme de T
h_t — hauteur totale d'une section transversale
h — hauteur utile d'une section
z — bras de levier du couple des forces élastiques
W — moment résistant d'une section
I — moment d'inertie d'une section
S_0 — moment statique par rapport à l'axe neutre de la section réduite rendue homogène
A'_a — aire de la section droite de l'armature principale dans la zone tendue
A_a — aire de la section droite de l'armature longitudinale dans la zone comprimée
A'_{af} — aire de la section droite des étriers, traversés par une fissure oblique
A'_v — aire de la section droite des étriers situés dans un plan perpendiculaire à l'axe de la poutre
A'_{a0} — aire de la section droite des barres relevées ou des étriers, traversés par une fissure oblique
t_0 — espacement des armatures relevées
t — espacement des étriers
θ — angle entre les étriers et l'axe de la poutre
a — distance entre la force concentrée et l'appui de la poutre
e — projection d'une fissure oblique sur une direction parallèle à l'axe de la poutre
l^0_{fv}, l_{fv} — distances entre les fissures obliques, de calcul et réelle, mesurées suivant l'axe de la poutre

$\varrho = \frac{\sum p_a}{A_b} = \pi \frac{\sum \Phi}{A_b}$ — coefficient de RÜSCH

$\eta = \frac{N_s}{N}$ — coefficient déterminant la sécurité au cisaillement

$\bar{\omega}_v = \frac{A'_{af}}{bt \sin\theta}$ — aire relative de la section des étriers

$\bar{\omega} = \frac{A'_a}{bh}$ — aire relative de la section de l'armature longitudinale

$\bar{\omega}_0 = \frac{A'_{a0}}{bt_0}$ — aire relative de la section des barres relevées

p_a — périmètre d'une barre

$\Phi = d$ — diamètre d'une barre

1. INTRODUCTION

Le problème du cisaillement dans les constructions en béton armé est depuis longtemps l'objet d'expériences dans plusieurs centres de recherches en Europe et en Amérique. Malgré l'abondance des résultats des essais et des études théoriques, on n'est pas arrivé à une méthode nouvelle de dimensionnement aussi générale que la méthode classique, mais plus précise. Presque tous les chercheurs proposent leurs propres formules en se basant sur les résultats de leurs essais. Ces formules, appliquées au dimensionnement, donnent cependant des résultats tellement différents qu'il est impossible de trouver une relation unique et générale fournissant des résultats théoriques suffisamment approchés des conclusions des études expérimentales réalisées par divers chercheurs. C'est dû au fait que les chercheurs, face à plusieurs paramètres déterminant l'état limite de fissuration et de rupture dans la zone d'appui, essaient de réduire le nombre de ceux-ci. Une telle réduction des paramètres, qui sont liés entre eux, est réalisée d'une façon assez arbitraire et à divers degrés.

Ainsi, on est arrivé à une situation paradoxale, où le nombre accru des essais effectués avec des appareils de mesure très perfectionnés a amené une confusion et un chaos plus grave.

C'est probablement en tenant compte de cet état de choses que la conférence de l'A.I.P.C., en août 1964 à Rio, a considéré la méthode classique comme la plus valable, malgré ses défauts connus.

Le présent ouvrage est le résultat de l'analyse des comptes rendus des essais de différents chercheurs étrangers et, partiellement, de ceux de l'auteur. Son but est de créer une base de départ pour une théorie complète du cisaillement.

L'auteur de cet ouvrage a cherché non seulement à présenter d'une façon compréhensible et ordonnée les nombreux résultats des essais mais aussi à les analyser pour trouver les solutions valables des questions fondamentales, et pourtant controversées, concernant le cisaillement dans le béton armé, telles que :

1. Dans quelle mesure l'hypothèse de Mohr sur la résistance des matériaux peut-elle être appliquée dans les problèmes de cisaillement ?

2. Quand et comment peut-on réduire l'armature transversale et quel est le type le plus rationnel d'armature ?

3. Dans quelle mesure peut-on supposer que l'effort tranchant est transmis dans la zone comprimée du béton et dans les barres longitudinales de l'armature principale ?

4. Dans quels cas peut-on admettre les fissures inclinées et quelle est leur ouverture maximale ?

5. Est-ce que les méthodes actuelles de dimensionnement pour le cisaillement peuvent être employées pour tous les types d'éléments, sans tenir compte de la forme de la section transversale, de la qualité du béton, du mode de charge, etc. ?

L'auteur est conscient du fait qu'il ne peut pas répondre à ces questions de manière complète et définitive, mais il espère que dans l'état actuel de la connaissance du phénomène de cisaillement le présent ouvrage permettra d'expliquer quelques problèmes fondamentaux de la théorie du béton armé et constituera une base pour le dimensionnement plus rationnel des constructions.

2. RÉSISTANCE DU BÉTON ET DES AUTRES MATÉRIAUX FRAGILES DANS L'ÉTAT COMPLEXE DE CONTRAINTE

2.1. ÉTAT DE CONTRAINTE DANS LA ZONE DE CISAILLEMENT

L'estimation convenable de la résistance et le dimensionnement rationnel des éléments en béton armé soumis à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant présentent encore maintenant des difficultés importantes. C'est dû au fait que le béton n'est ni un matériau isotrope ni homogène. Par conséquent, il n'est pas facile de définir les variations des caractéristiques mécaniques E et ν, en particulier dans les états complexes de déformation.

Le béton en fonction de ses propriétés physiques peut être considéré comme un corps visco-élastique; il n'existe donc pas dans le béton de relations univoques et réversibles entre les contraintes et les déformations. Les déformations plastiques, liées à ses propriétés visqueuses, se développent même sous des contraintes très petites, et les contraintes élevées provoquent des déformations plastiques considérables. En conséquence, le temps et les propriétés rhéologiques jouent un rôle important dans la détermination de la résistance du béton.

De plus, il est à noter qu'un élément en béton armé passe par deux phases différentes de comportement sous la charge. Ce passage de la première phase, sans fissuration, à la seconde, phase de fissuration, est lié à des variations et des déplacements de l'état interne des contraintes, donc à un changement profond du comportement de cet élément. Dans le cas du cisaillement, le problème est encore plus compliqué, car les états limites de déformation, de fissuration et de rupture dépendent de nombreux facteurs liés entre eux, tels que le type et la quantité d'armatures longitudinale et transversale, la forme de la section transversale de l'élément, l'adhérence entre le béton et l'acier, la résistance du béton et celle de l'acier, etc.

La diversité des facteurs en jeu et leur corrélation difficile à définir rendent impossible une solution théorique du problème. Il est, en conséquence, nécessaire de trouver des formules approchées en se basant sur les résultats des recherches expérimentales.

Notre connaissance de la résistance et de la déformabilité du béton est déduite surtout des résultats des essais effectués sur les éléments dans des états unidimensionnels de contrainte. Or, dans la plupart des cas, le béton dans une construction se trouve dans des états de contrainte à deux ou à trois dimensions. Ceci nécessite l'emploi d'une théorie plus générale de la résistance du béton.

Le problème du cisaillement dans les éléments en béton armé est ramené le plus souvent à l'état plan de contrainte, bien que dans le cas d'une armature forte composée d'étriers qui s'opposent efficacement aux déformations transversales, un état à trois dimensions puisse apparaître. Etant donné que, pour les besoins pratiques, l'analyse de l'état plan de contrainte donne des résultats suffisamment précis, nous nous occuperons ici principalement de cet état de contrainte. En conséquence, l'état de contrainte dans la zone de cisaillement d'une poutre en béton armé est défini de manière univoque, dans un système rectangulaire de coordonnées, par les valeurs des contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy}. L'existence des contraintes τ_{xy} dans une section transversale considérée indique que les contraintes principales σ_1 et σ_2, qui représentent la sollicitation du béton, ne correspondent pas aux directions du système des coordonnées employé, mais qu'elles sont inclinées par rapport à un des axes de ce système d'un angle β ; voir par exemple la figure 2-1a.

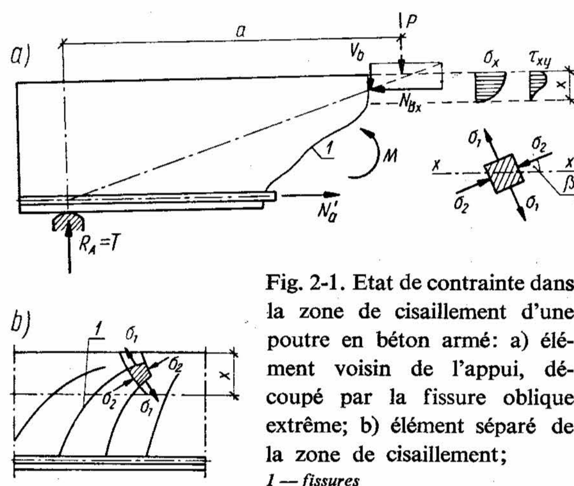


Fig. 2-1. Etat de contrainte dans la zone de cisaillement d'une poutre en béton armé: a) élément voisin de l'appui, découpé par la fissure oblique extrême; b) élément séparé de la zone de cisaillement;
1 — fissures

Dans des éléments de constructions tels que les poutres, l'influence des contraintes σ_y (perpendiculaires à l'axe longitudinal de la poutre) ne peut être remarquée que dans le voisinage immédiat de la charge concentrée, donc dans une zone limitée près de l'appui.

Ainsi, la formule générale pour déterminer les contraintes principales dans la zone de cisaillement, dont la forme est la suivante

$$\sigma_{1,2} = -\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}, \tag{2.1}$$

est ramenée à la forme

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}, \tag{2.2}$$

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}. \tag{2.3}$$

D'après la relation (2.2) dans les sections transversales de la zone de cisaillement, les contraintes principales σ_1 sont positives (tensions) sur toute la hauteur de la section. Ceci indique que les axes neutres de la flexion et du cisaillement ne se confondent pas. Dans une poutre non fissurée en béton armé, le système des lignes de force des contraintes principales est presque le même que celui d'une poutre en matériau homogène (fig. 2-2). Par contre, à partir de l'apparition des fissures l'état de contrainte dans une poutre en béton armé est entièrement différent et dépend du type et du nombre des fissures inclinées.

L'apparition des fissures dans le béton correspond le plus souvent à son caractère de matériau fragile, et la direction des fissures est perpendiculaire à la direction des contraintes de tension.

Dans la zone de cisaillement où σ_1 est une contrainte de tension et σ_2 représente la compression, la direction des fissures correspond approximativement à la direction des

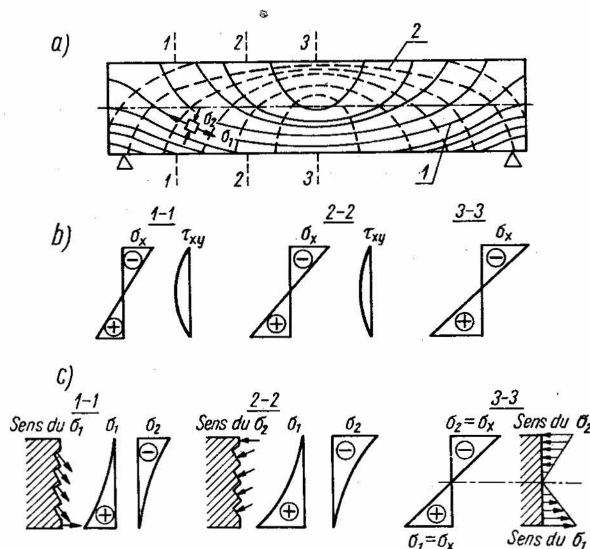


Fig. 2-2. Etat de contrainte dans une poutre en matériau homogène: a) schéma d'une poutre avec les lignes de force des contraintes principales σ_1, σ_2; b) diagrammes des contraintes normales et tangentes dans les sections *1—1*, *2—2*, *3—3* de la poutre; c) diagrammes des contraintes principales dans les sections *1—1*, *2—2*, *3—3* de la poutre;
1 — direction de la contrainte σ_1 (traction), 2 — direction de la contrainte σ_2 (compression)

lignes de force des contraintes de compression. Ce n'est que dans les poutres précontraintes dans deux directions, où les deux contraintes principales sont des compressions, que peut apparaître une fissure de glissement. Dans ce cas, le plan de glissement est une fonction des contraintes de cisaillement maximales et il ne correspond à aucune des directions des contraintes principales.

Dans les poutres en béton armé dans la phase II (fissuration) on ne tient pas compte des tractions dans le béton. Par conséquent, dans la zone de traction, le moment statique est

théoriquement constant, $S_0 = C^{te}$, et la contrainte de cisaillement τ_{xy} dans la section transversale rectangulaire, en T ou en double T est également constante et peut être calculée d'après la formule

$$\tau_{xy} = \frac{TS_0}{b_0 I} = \tau_0. \tag{2.4}$$

En négligeant les contraintes dans le béton dans la zone tendue ($\sigma_x = 0$) nous avons la formule (2.2) dans sa forme simplifiée

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_0 = \frac{T}{b_0 z} \tag{2.5}$$

et le système des lignes de force des contraintes principales représenté par la figure 2-3.

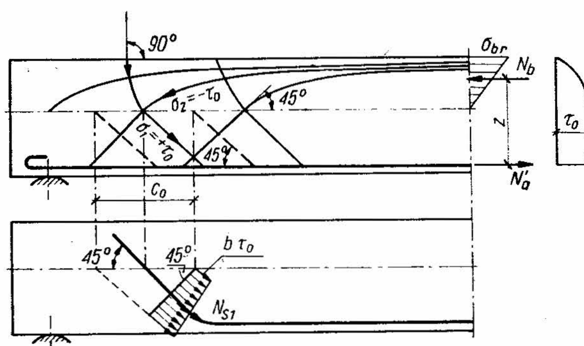


Fig. 2-3. Disposition idéale des lignes de force des contraintes principales dans une poutre fissurée en béton armé

On voit donc que le problème de la détermination des contraintes principales se ramène au calcul des contraintes de cisaillement dans l'axe où les contraintes σ_x s'annulent. C'est pourquoi le problème de la résistance dans la zone soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, qui se rattache plutôt aux contraintes principales, est connu dans la théorie du béton armé sous le nom de problème du cisaillement.

2.2. ANALYSE DE LA RÉSISTANCE DU BÉTON ET DES AUTRES MATÉRIAUX FRAGILES PAR DES HYPOTHÈSES DE RUPTURE

La rupture sous un état de contrainte (une fissure dans un matériau fragile) commence à l'endroit le plus faible. Ensuite, les concentrations des contraintes aux deux extrémités de la fissure provoquent le développement rapide de la rupture, même sans augmentation considérable des contraintes.

A la destruction des liens structuraux du matériau et à ses déformations plastiques est toujours liée une transformation d'énergie potentielle des liens inter-moléculaires en une autre forme d'énergie. C'est pourquoi dans leur formulation la plus générale les hypothèses

concernant la rupture d'un matériau ont un caractère énergétique. Etant donné que l'énergie est un invariant, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix du système de coordonnées, la sollicitation du matériau est exprimée par des fonctions des invariants (par exemple de la contrainte moyenne et de la contrainte octaédrique).

L'hypothèse de HUBER-MISES-HENCKY [37] est une des hypothèses énergétiques les mieux connues. Elle est basée sur la supposition que la sollicitation d'un matériau peut être mesurée par l'énergie de glissement, D'après cette hypothèse, l'état limite de rupture correspond à une certaine valeur du travail de déformation. Dans un système rectangulaire arbitraire de coordonnées ce critère s'exprime par l'équation suivante :

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)}. \tag{2.6}$$

Dans un système orthogonal des contraintes principales cette équation se transforme en la suivante :

$$\sigma' = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}, \tag{2.7}$$

où σ' désigne la résistance du matériau soumis à une tension axiale. L'équation (2.7) dans le système de coordonnées $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ représente une surface d'état limite sous la forme d'un cylindre, dont l'axe est une droite d'équation $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Le critère de la rupture d'après HUBER-MISES-HENCKY est valable pour les matériaux presque isotropes, pour lesquels les valeurs de la résistance à la compression σ_{pr} et à la traction σ' sont du même ordre de grandeur. Dans le cas des matériaux fragiles, donc également dans le cas du béton, la résistance à la traction est k fois plus petite que la résistance à la compression. Par conséquent, les contraintes de traction diminuent la résistance du béton k fois plus efficacement que les contraintes de compression; on peut en tenir compte dans les raisonnements en attribuant un poids k fois plus grand aux contraintes de traction.

K. HRUBAN et J. HRUBAN [36] ont accepté ces hypothèses en admettant également le critère énergétique de BELTRAMI. D'après ce critère, la sollicitation d'un matériau est mesurée par la quantité d'énergie élastique que le matériau peut accumuler dans une unité de volume, jusqu'au moment où la limite dangereuse est atteinte en ce point du corps. Le critère de rupture qui tient compte de ces suppositions s'exprime par l'équation

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)}. \tag{2.8}$$

Pour les matériaux fragiles, tels que le béton, K. et J. HRUBAN [36] proposent de remplacer dans l'équation (2.8) la contrainte principale σ par la contrainte principale réduite $\hat{\sigma}$. Pour les compressions on a $\hat{\sigma} = \sigma$, tandis que pour les tractions $\hat{\sigma} = k\sigma$. En adoptant ces suppositions nous obtenons le critère de rupture du béton (2.8) sous la forme suivante

$$\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2+\hat{\sigma}_3^2-2\nu(\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2+\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3+\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1) = \sigma_{pr}^2, \tag{2.9}$$

où : σ_{pr} — résistance du béton à la compression uni-axiale,
$\hat{\sigma}_i = k\sigma_i$ — pour les cas où $\sigma > 0$ (traction),
$\hat{\sigma}_i = \sigma_i$ — pour les cas où $\sigma < 0$ (compression),
$i = 1, 2, 3, \dots$
$k = \frac{\sigma_{pr}}{\sigma'}$ — rapport entre les résistances du béton à la compression et à la traction,
ν — coefficient de POISSON.

Dans la zone de cisaillement d'une poutre en béton armé, nous avons le plus souvent le cas a) suivant :

a) Pour $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, $\sigma_3 = 0$,
on a

$$\hat{\sigma}_1 = k\sigma_1, \quad \hat{\sigma}_2 = \sigma_2, \quad \hat{\sigma}_3 = 0.$$

En portant ces relations dans l'équation (2.9), nous trouvons

$$k^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2k\nu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_{pr}^2. \tag{2.10}$$

b) Pour $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et $\sigma_3 = 0$, d'après l'équation (2.9) il vient

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = \left(\frac{\sigma_{pr}}{k}\right)^2 = \sigma'^2, \tag{2.11}$$

et, dans le cas particulier où $\sigma_1 = \sigma_2$, la contrainte limite est égale à

$$\sigma_1 = \frac{\sigma'}{\sqrt{2(1-\nu)}},$$

donc un peu moindre que la résistance σ' à la traction axiale, car pour le béton $\nu \approx \frac{1}{6}$.

c) Pour $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$ et $\sigma_3 = 0$, nous avons

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_{pr}^2. \tag{2.12}$$

Dans le cas d'une compression bi-axiale, les plans de glissement apparaissent, et suivant ces plans le béton subit des déformations plastiques; ceci nous permet de supposer $\nu = 0{,}5$.

Dans le plan de coordonnées σ_1, σ_2 (fig. 2-4), on a représenté les équations (2.10), (2.11) et (2.12). De plus, dans le quadrant III on a donné également les résultats expérimentaux figurant dans les ouvrages de GŁOMB [27], WEIGLER et BECKER [83], et K. et J. HRUBAN [36]. L'état de contrainte dans la zone de cisaillement est indiqué par le quadrant IV, où se trouvent aussi les résultats des essais de VERGIN [85].

Dans l'axe neutre où les contraintes $\sigma_x = 0$ et $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy}$ l'équation (2.10) prend la forme suivante

$$k^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2 - 2k\nu\sigma_1(-\sigma_1) = \sigma_{pr}^2,$$

d'où il vient

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{pr}}{\sqrt{k^2 + 2\nu k + 1}} = \frac{\sigma'}{\sqrt{1 + \frac{2\nu}{k} + \frac{1}{k^2}}}. \tag{2.13}$$

Il résulte de l'équation (2.13) que pour $k = 12$ et $\nu = 0{,}15$ la résistance dans l'axe neutre est de 1,6 % plus petite que celle qui correspond à la traction uni-axiale. Ainsi, nous avons trouvé une confirmation théorique du fait observé expérimentalement, que les fissures inclinées pour $\tau_{xy} = \sigma'$ ne s'arrêtent pas à l'axe où les contraintes σ_x sont égales à zéro, mais qu'elles entrent plus profondément dans la zone dite comprimée.

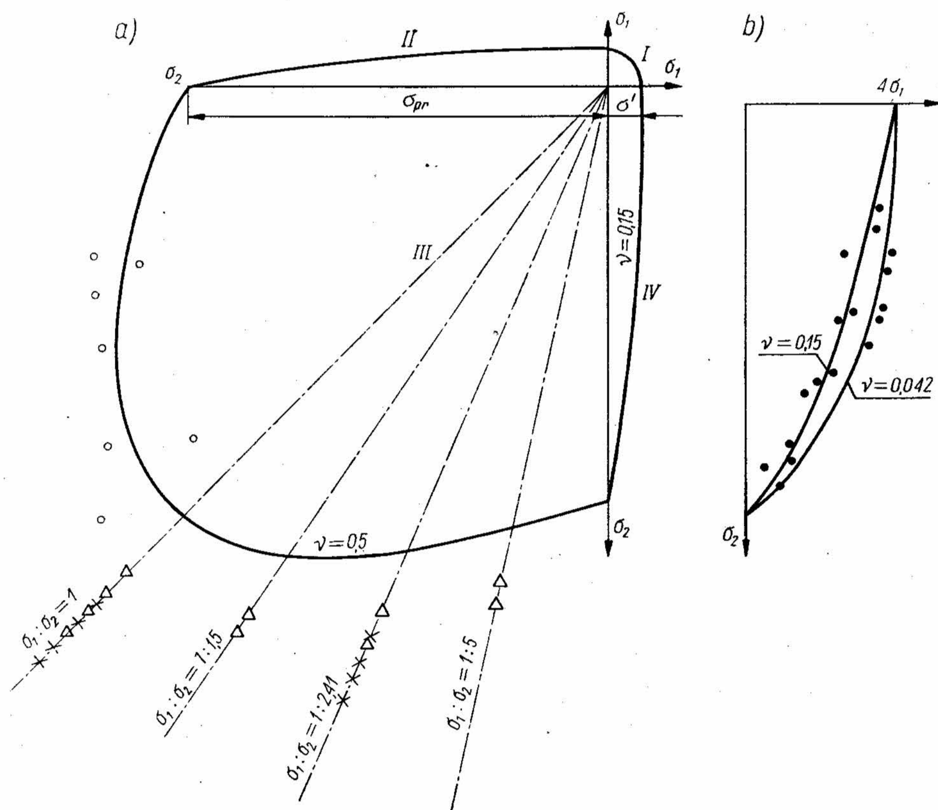


Fig. 2-4. Résistance du béton dans l'état plan de contrainte d'après les études et la théorie de K. et J. HRUBAN: a) résistance du béton dans le cas de $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ (quadrant *I*) ; $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ (quadrant *II*) ; $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$ (quadrant *III*) ; $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ (quadrant *IV*) ; b) résistance du béton dans le cas de $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ d'après la théorie de K. et J. HRUBAN et des expériences de VIERGIN;
○ — essais de K. HRUBAN et J. HRUBAN
● — essais de K. P. VIERGIN
× — essais de H. WEIGLER et G. BECKER ($\sigma_{cyl} = 500$ kgf/cm²)
△ — essais de J. GŁOMB

Le critère de rupture du béton du point de vue énergétique et basé sur la quantité d'énergie accumulée dans l'unité de volume du matériau ne donne pas des résultats entièrement concordants avec les expériences. Cependant, jusqu'à présent on n'a pas réussi à mettre au point un critère de rupture tenant compte non seulement de l'hétérogénéité,

mais également des phénomènes rhéologiques dans le béton. Par conséquent, les théoriciens et les expérimentateurs utilisent le plus souvent le critère de rupture de MOHR, qui se caractérise par la simplicité de sa formulation et qui fournit des résultats très valables.

O. MOHR [58] a étudié l'état de contrainte le plus général, à trois dimensions, en supposant les inégalités algébriques suivantes

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

et il a conclu que la sollicitation du matériau en un point donné d'un corps n'est déterminée que par les contraintes σ_1 et σ_3, tandis que la contrainte moyenne est sans influence. Ceci apparaît sur la figure 2-5 où le critère de MOHR est représenté. Pour cette représen-

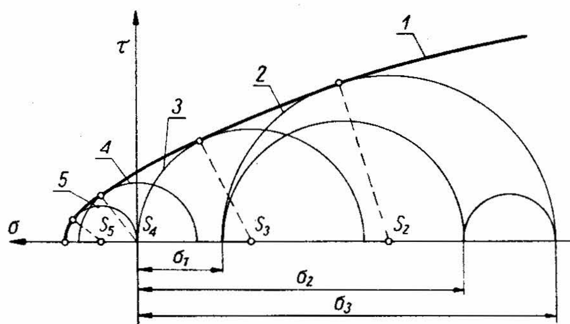


Fig. 2-5. Etat de contrainte tri-dimensionnel d'après l'hypothèse de MOHR

1 — courbe intrinsèque ; 2 — compression tri-axiale ; 3 — compression uni-axiale ; 4 — cisaillement pur, 5 — traction uni-axiale

tation graphique MOHR a admis un système rectangulaire des coordonnées σ, τ, où les cercles de contrainte déterminent les limites pour les contraintes normales et tangentielles en un point étudié du corps. D'après l'hypothèse de MOHR tous les états de contrainte correspondant à la rupture, et représentés par les cercles limites, ont une courbe limite commune — la courbe intrinsèque (Hüllkurve).

Le point où un cercle de MOHR est tangent à la courbe intrinsèque détermine les valeurs des contraintes normale et tangentielle dans le plan de fissuration ou de glissement. L'inclinaison de ce plan par rapport à la direction de la plus grande contrainte principale est définie par l'angle φ entre la tangente à la courbe intrinsèque et au cercle de MOHR et l'axe (fig. 2-6).

La détermination convenable d'une courbe intrinsèque pour un matériau étudié demande que les cercles de MOHR, d'après différents essais, soient préalablement définis. Ceci concerne des états de contrainte différents, tels que la compression uni-axiale, la compression avec torsion, la traction, la torsion pure, le cisaillement pur, la torsion avec traction etc. MOHR n'a pas défini analytiquement la forme de la courbe intrinsèque et il a constaté seulement que si l'on prend une droite tangente aux cercles de compression et de traction (fig. 2-7) comme courbe intrinsèque on ne commet pas d'erreur considérable. En admettant

cette simplification nous obtenons l'ordonnée du point F du segment de droite F_1F_2 d'après de simples relations géométriques sous la forme de la formule

$$\pm\,\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma'\sigma_{pr}} - \sigma\frac{\sigma_{pr}-\sigma'}{2\sqrt{\sigma'\sigma_{pr}}}, \qquad (2.14)$$

Cette équation détermine la contrainte de cisaillement τ et la contrainte normale σ ; ces contraintes provoquent la rupture dans un élément de la surface de rupture. En portant $\sigma = 0$ dans l'équation (2.14) nous obtenons le cas où la structure du matériau est détruite dans le plan des contraintes de cisaillement, sans que les contraintes normales entrent en jeu. C'est la résistance au cisaillement du béton, qui d'après MOHR est égale à

$$\bar{\tau}_b = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma'\sigma_{pr}}\,. \qquad (2.15)$$

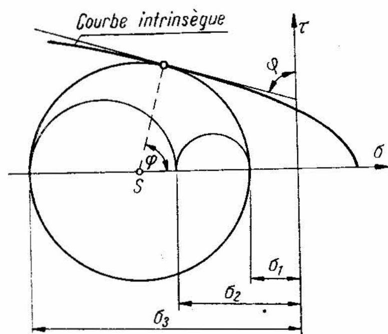


Fig. 2-6. Détermination du plan de rupture (fissuration) d'après l'hypothèse de MOHR

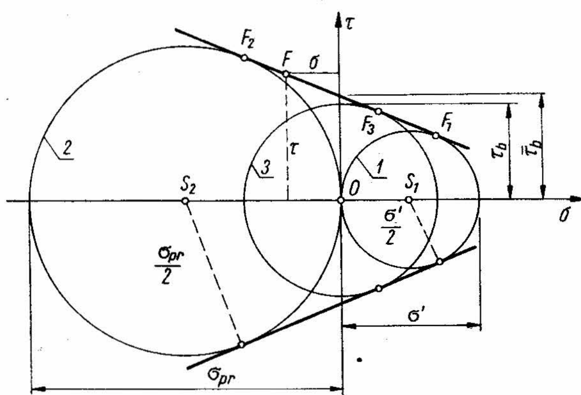


Fig. 2-7. Ligne intrinsèque de MOHR sous la forme d'une droite

1 — traction uni-axiale ; 2 — compression uni-axiale ; 3 — cisaillement pur

Le critère de rupture de MOHR a été d'abord sévèrement critiqué par de nombreux chercheurs, entre autres par HUBER et par MÖRSCH. Leurs objections étaient principalement basées sur le fait que dans ce critère on faisait abstraction complète de la contrainte principale moyenne. Cependant, les études ont démontré que l'influence de σ_2 est peu importante.

Par exemple, LEON [50], qui est un partisan convaincu du critère de MOHR, soutient que ce critère est le plus général et qu'il est valable pour les matériaux ductiles et fragiles, et que l'erreur produite par l'abstraction faite de l'influence de la contrainte σ_2 ne dépasse pas 15 %, même dans les cas extrêmes. Par ses considérations théoriques publiées dans les ouvrages [49] et [50], LEON est arrivé à la conclusion que la courbe intrinsèque la plus adéquate pour les matériaux fragiles a la forme d'une parabole du second degré.

Les opérations analytiques basées sur la courbe intrinsèque en forme de parabole, tangente aux cercles de MOHR déterminés pour la compression et la traction axiale et pour des rapports $\frac{\sigma_{pr}}{\sigma'}$ variables, ont amené LEON aux conclusions suivantes:

a) Lors d'une expérience de traction uni-axiale la rupture par glissement ne peut se produire que dans les matériaux pour lesquels on a

$$\frac{\sigma_{pr}}{\sigma'} < 3{,}0.$$

Cependant, la fissure dirigée dans le sens de l'effort ne peut pas apparaître, car le cercle de MOHR $K_r = K_1$ ne peut pas être tangent à la courbe intrinsèque au sommet de la parabole, dans l'axe (fig. 2-8).

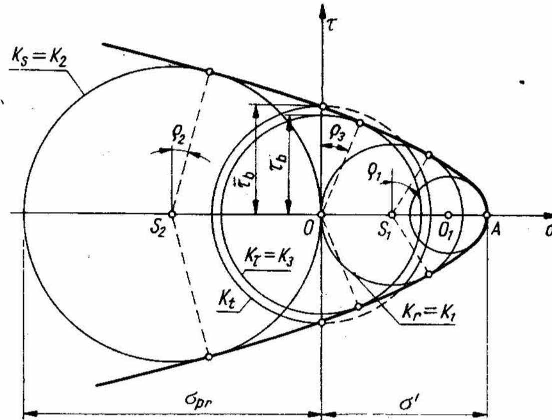


Fig. 2-8. Enveloppe de MOHR pour des matériaux de rapport $\sigma_{pr}/\sigma' < 3{,}0$, [50]

b) Dans le cas d'un matériau où le rapport $\frac{\sigma_{pr}}{\sigma'} = 3{,}0$, le cercle $K_r = K_1$ de MOHR (fig. 2-9) pour la traction axiale est tangent à la parabole à son sommet, et l'angle entre le plan des contraintes principales de cisaillement et le plan de la rupture est $\frac{\varrho_1}{2} = 45°$. Ceci indique que, dans ce cas, la rupture prend la forme d'une fissure dirigée dans le sens perpendiculaire à l'effort de traction. Pour ce cas $\frac{\sigma_{pr}}{\sigma'} = 3{,}0$ la résistance à la torsion (le cisaillement pur) est :

$$\tau_b = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma' = 0{,}866\sigma',$$

et la résistance au cisaillement :

$$\bar{\tau}_b = \sigma'.$$

On peut déduire de ces considérations que dans les essais à la traction uni-axiale des éléments en matériaux fragiles, où le rapport $\frac{\sigma_{pr}}{\sigma'} > 3$, on peut s'attendre toujours à la rupture par une fissure dans le sens de l'effort.

Pour le rapport $\frac{\sigma_{pr}}{\sigma'} = 2(1+\sqrt{2}) = 4{,}828$ (fig. 2-10), la résistance à la torsion est égale à la résistance à la traction axiale. Ceci indique que pour $\frac{\sigma_{pr}}{\sigma'} > 4{,}828$ dans un essai de torsion la rupture par une fissure longitudinale aura lieu sous la charge correspondant aux contraintes de torsion égales à σ'.

Pour les bétons on a $\frac{\sigma_{pr}}{\sigma'} = 6$ à 15 ; ce rapport reste donc toujours supérieur à 4,828. Par conséquent, les fissures inclinées dues au cisaillement près de l'axe où les contraintes σ_x s'annulent et dans la zone inférieure sont toujours perpendiculaires aux contraintes principales de traction. Ce n'est que près du bord comprimé, où les contraintes de traction

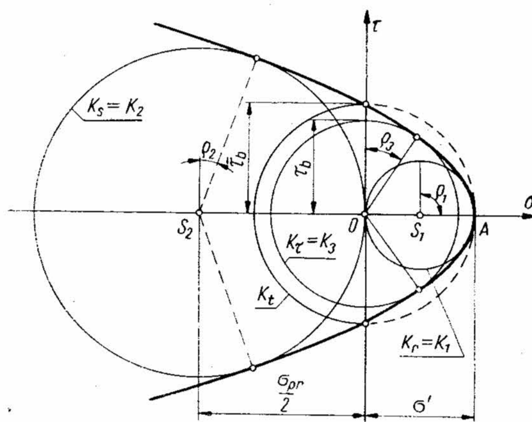


Fig. 2-9. Enveloppe de MOHR pour des matériaux de rapport $\sigma_{pr}/\sigma' = 3{,}0$ [50]

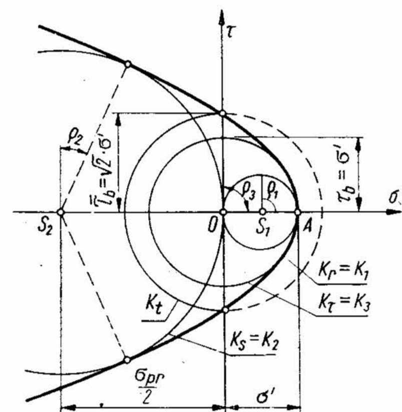


Fig. 2-10. Enveloppe de MOHR pour des matériaux de rapport $\sigma_{pr}/\sigma' = 4{,}828$ [50]

σ_1 tendent vers zéro et les contraintes de compression atteignent leur maximum, qu'on peut prévoir la possibilité d'une fissure de glissement. Toutefois, on aura probablement, affaire ici non à un "glissement pur" mais à la destruction de la structure par fissures longitudinales et par glissement, destruction caractérisée par la fissuration simultanée dans quelques plans, inclinés différemment.

GENIJEV et KISSYUK [21] [22] considèrent que la théorie de MOHR appliquée au béton reproduit assez bien les états de contrainte qui mènent à la rupture par glissement. Ils ont constaté, cependant, que la courbe intrinsèque de MOHR en forme de parabole donne des valeurs trop élevées de la résistance pour la compression bi-axiale. GENIJEV et KISSYUK ont proposé, en utilisant les études théoriques de FILONENKO-BORODICH, de remplacer les critères de rupture actuels, basés sur la relation fonctionnelle suivante

$$F(J_1, J_2) = 0, \tag{2.16}$$

par un critère déduit de la relation

$$F(J_1, J_2, J_3) = 0, \tag{2.17}$$

où J_1 est un premier invariant du tenseur de contrainte, tandis que J_2 et J_3 sont le deuxième et le troisième invariants du déviateur de contrainte :

$$J_1 = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3, \tag{2.18}$$

$$J_2 = \frac{1}{3}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)], \tag{2.19}$$

$$J_3 = -\frac{1}{27}[3(\sigma_1\sigma_2^2+\sigma_2\sigma_3^2+\sigma_3\sigma_1^2+\sigma_2\sigma_1^2+\sigma_3\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_3^2)-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2(\sigma_1^3+\sigma_2^3+\sigma_3^3]. \tag{2.20}$$

En prenant comme paramètres d'état limite de rupture les résistances à la compressions σ_{pr}, à la traction σ' et au cisaillement τ_b, l'équation (2.17) de la surface limite prend la forme suivante

$$3J_2 = [\sigma_{pr}\sigma'+(\sigma_{pr}-\sigma')J_1]$$

$$\left\{1-\left(1-\frac{3\tau_b^2}{\sigma_{pr}\sigma'}\right)\cdot\left[1-\frac{J_3}{2}\left(\frac{J_2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\right\}. \tag{2.21}$$

La surface limite déterminée par l'équation (2.21) est inscrite et tangente en trois points à la surface d'un paraboloïde limite de révolution d'axe de symétrie $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Le paraboloïde est donné par l'équation

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)-(\sigma_{pr}-\sigma')(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \sigma_{pr}\sigma'. \tag{2.22}$$

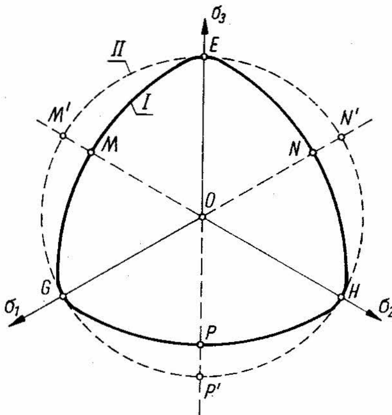


Fig. 2-11. Traces des intersections des surfaces limites données par les équations (2.21) et (2.22) avec le plan perpendiculaire à l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ [21]

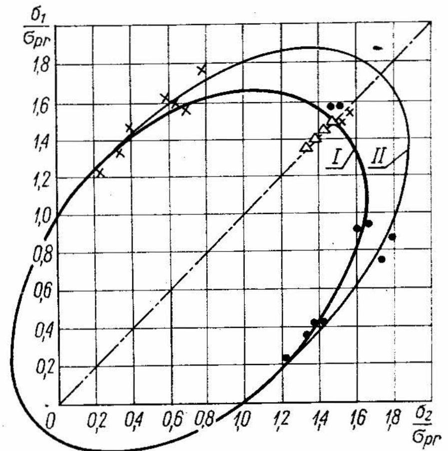


Fig. 2-12. Courbes intrinsèques pour un état plan de contrainte : *I* — d'après Genijev ; *II* — d'après Mohr [21]. Les résultats des essais de:
× CNJJSK, ● Weigler, △ Głomb

La ligne continue *I* de la figure 2-11 est la trace de la surface limite (2.21) sur le plan perpendiculaire à la droite d'équation $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. La ligne discontinue *II* est la trace du paraboloïde limite de révolution (2.22) sur le même plan. Il est donc évident que les différences extrêmes entre ces deux surfaces ont lieu dans trois plans méridiens, dont les équations sont: $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, $\sigma_2 - \sigma_3 = 0$, $\sigma_3 - \sigma_1 = 0$ (*MM', NN', PP'*). Cependant, les points *E, G, H* sont des points communs de la surface limite (2.21) et du paraboloïde de révolution (2.22).

Pour analyser l'état plan des contraintes σ_1, σ_2 nous portons $\sigma_3 = 0$ dans l'équation (2.21) et nous obtenons l'équation suivante

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = [\sigma_{pr}\sigma' + (\sigma_{pr} - \sigma')(\sigma_1 + \sigma_2)]$$
$$\left\{1 - \left(1 - \frac{3\tau_b^2}{\sigma_{pr}\sigma'}\right)\left[1 - \frac{2(\sigma_1^3 - \sigma_2^3) - 3\sigma_1\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma^2)^{\frac{2}{3}}}\right]\right\}. \qquad (2.23)$$

D'où la résistance σ_{bk} du béton soumis à la compression uniforme bi-axiale est déterminée par l'équation

$$\sigma_{bk} = (\sigma_{pr} - \sigma')\left(\frac{6\tau_b^2}{\sigma_{pr}\sigma'} - 1\right) + \sqrt{(\sigma_{pr} - \sigma')^2\left(\frac{6\tau_b^2}{\sigma_{pr}\sigma'} - 1\right)^2 + \sigma_{pr}\sigma'\left(\frac{6\tau_b^2}{\sigma_{pr}\sigma'} - 1\right)}. \qquad (2.24)$$

De l'équation (2.24) on peut déduire que la résistance à la compression bi-axiale augmente, en comparaison de la résistance à la compression uni-axiale, mais pas autant qu'il devrait en résulter de la relation correspondant à la surface limite du paraboloïde de révolution. Par exemple, pour $\frac{\sigma'}{\sigma_{pr}} = 0{,}12$ et $\tau_b = 0{,}19\,\sigma_{pr}$ nous obtenons $\sigma_{bk} \approx 1{,}8\,\sigma_{pr}$ d'après l'équation de la courbe correspondant à la surface du paraboloïde de révolution, tandis que d'après l'équation (2.24) on a $\sigma_{bk} \approx 1{,}45\,\sigma_{pr}$.

La courbe intrinsèque *I* de la figure 2-12 est déduite de l'équation (2.23) pour le béton, où le rapport $\frac{\sigma'}{\sigma_{pr}} = 0{,}12$. La courbe *II* correspond à la surface limite du paraboloïde de révolution. D'après les résultats des essais donnés par la figure 2-12 on voit que dans le plan de la compression bi-axiale la courbe intrinsèque *I* donne des valeurs plus proches de celles des expériences que la courbe *II*. Dans les autres quadrants, ces deux courbes sont identiques : ceci indique que les résultats théoriques s'approchent des résultats expérimentaux avec la même précision. Etant donné que dans la zone de cisaillement des éléments en béton armé une contrainte est toujours positive et l'autre, négative, il en résulte que le critère de rupture de MOHR dans cette zone détermine l'état de sollicitation avec autant de précision. En conséquence, il n'est pas nécessaire de chercher une formulation plus compliquée, donnée par les ouvrages [21] et [22], qui ne peut être utile que pour analyser les problèmes de cisaillement dans des éléments soumis à la précontrainte bi- et tri-axiale.

2.3. ANALYSE DE L'ÉTAT DE SOLLICITATION DU BÉTON ET D'AUTRES MATÉRIAUX FRAGILES DANS L'ÉTAT COMPLEXE DE CONTRAINTE D'APRÈS LES RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES

Il résulte des considérations présentées dans le sous-chapitre 2.1 que le comportement du béton dans la zone de cisaillement peut être examiné aussi bien dans un état plan de contrainte que dans un état à trois dimensions. Par conséquent, une analyse correcte des éléments soumis à l'action simultanée d'un effort tranchant et d'un moment fléchissant demande une connaissance générale du comportement du béton dans l'état complexe de contrainte. Etant donné qu'aucune des théories actuelles sur la rupture du béton n'englobe l'ensemble des phénomènes complexes qui se produisent dans le béton armé, nous sommes amenés à nous appuyer dans une large mesure sur les résultats des recherches expérimentales pour analyser la sollicitation du béton. Dans ce qui suit on a présenté ces recherches effectuées sur les matériaux fragiles, qui, d'après l'opinion de l'auteur, peuvent contribuer à expliquer certaines questions contestables dans le problème du cisaillement des éléments en béton armé et en béton précontraint.

2.3.1. ESSAIS DE KARMAN ET BÖKER

En 1915, KARMAN [42] a fait des expériences sur des cylindres en marbre et en grès. Ces éprouvettes ont été soumises à une compression uniforme suivant l'axe du cylindre et perpendiculairement à cet axe. D'après ces essais, KARMAN a constaté que les éprouvettes comprimées dans un état de contrainte voisin d'un état hydrostatique présentent une résistance plusieurs fois plus élevée que les éléments comprimés suivant un axe. KARMAN a conclu, en contrôlant la théorie de MOHR sur la base de ses expériences, que la courbe intrinsèque, pour les états voisins de l'état hydrostatique, augmente son rayon de courbure lorsque les contraintes s'accroissent et qu'elle tend vers une droite parallèle à l'axe σ (fig. 2-13). Les essais de KARMAN n'ont pas donné de réponse à l'objection fondamentale formulée contre le critère de MOHR en ce qui concerne l'omission de la contrainte moyenne σ_2.

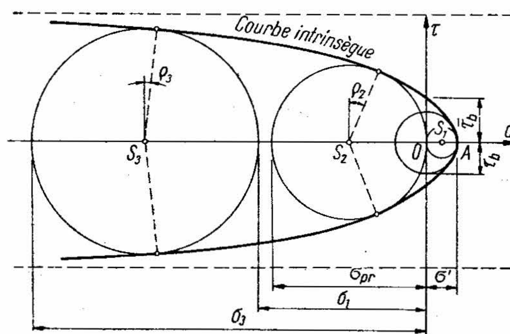


Fig. 2-13. Courbe intrinsèque avec des asymptotes parallèles d'après KARMAN [42]

BÖKER [11] a effectué ses expériences à la même époque que KARMAN sur des éprouvettes en marbre et en zinc fondu. Ces éprouvettes ont été chargées de façon hydrostatique en les soumettant simultanément à la traction et à la torsion. D'après ces essais, BÖKER a conclu que les courbes intrinsèques pour des états divers de contraintes complexes sont différentes, et il a attribué ces différences à l'influence de la contrainte moyenne σ_2.

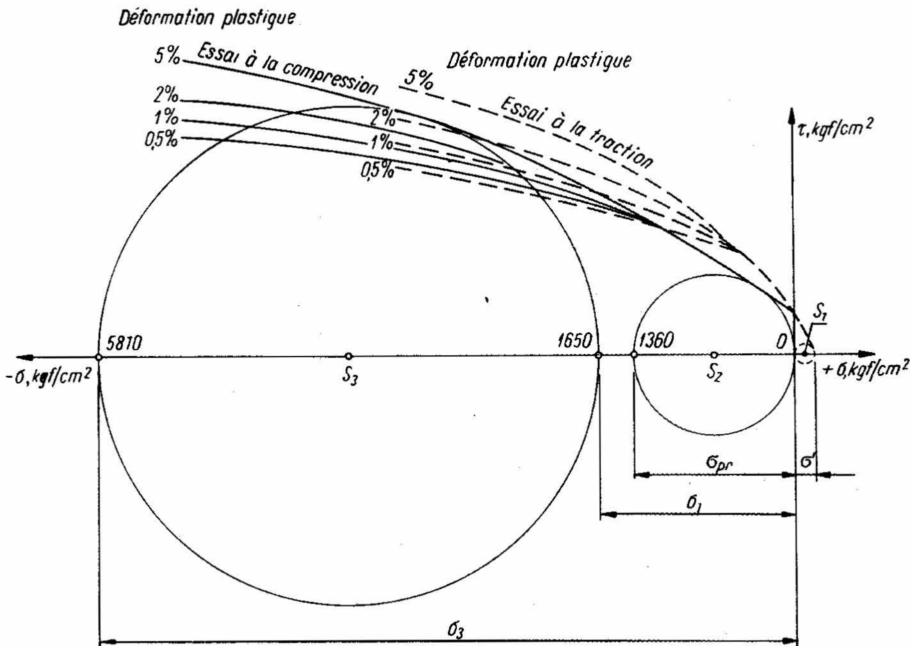


Fig. 2-14. Résultats des essais de KARMAN et BÖKER d'après l'hypothèse de MOHR

Les résultats des essais de KARMAN et de BÖKER effectués sur des éléments en marbre et considérés du point de vue du critère de MOHR sont présentés sur la figure 2-14. Ces essais concernent les résistances à la traction et à la compression des éprouvettes soumises préalablement à une pression hydrostatique.

2.3.2. ESSAIS DE MÖRSCH

En 1928, MÖRSCH a effectué des essais [63] sur des éprouvettes en béton armé en forme de la lettre S.

Dans la section transversale A-A de l'éprouvette représentée sur la figure 2-15 la résultante R qui passe par le centre de la section est inclinée de l'angle $\alpha = 26°30'$ par rapport à l'axe central de la partie prismatique de l'éprouvette. L'effort normal et l'effort tranchant calculés d'après les formules

$$N = R\cos\alpha \quad \text{et} \quad T = R\sin\alpha$$

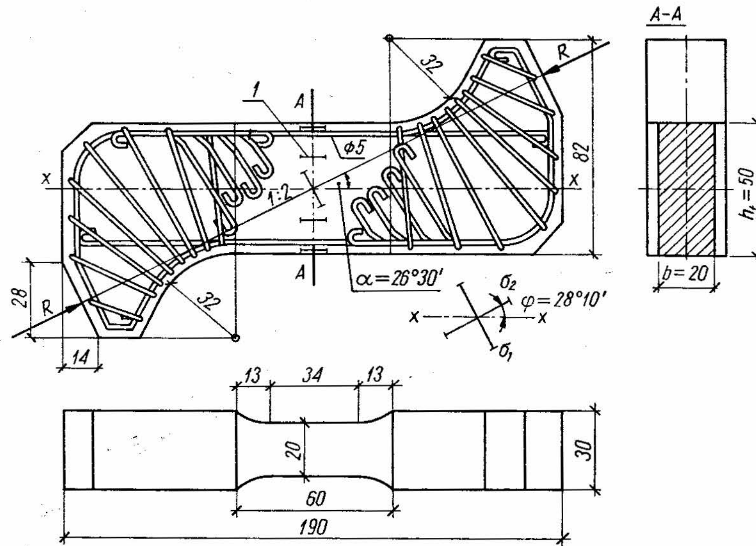


Fig. 2-15. Dimensions et armature des éprouvettes dans les essais de MÖRSCH [63]
1 — base des mesures des déformations

donnent pour le centre de la section les contraintes suivantes:

$$\sigma = \frac{N}{bh_t}, \qquad \tau = \frac{3}{2}\,\frac{T}{bh_t}.$$

D'après les valeurs connues des contraintes σ et τ MÖRSCH a déterminé les lignes de force des contraintes principales σ_1, σ_2 et les valeurs des contraintes σ et τ, ce qui est représenté sur la figure 2-16. Par exemple, pour les efforts $N = 50\,000$ kgf et $T = 25\,000$ kgf nous obtenons les contraintes suivantes au centre de la section:

$$\sigma_x = \frac{50\,000}{20\cdot 50} = 50\ \text{kgf/cm}^2,$$

$$\tau_{xy} = 1{,}5\,\frac{25\,000}{20\cdot 50} = 37{,}5\ \text{kgf/cm}^2,$$

et également

$$\sigma_1 = -\frac{50}{2} + \sqrt{\frac{50^2}{2} + 37{,}5^2} = +20\ \text{kgf/cm}^2\ \text{(tension)}$$

$$\sigma_2 = -\frac{50}{2} - \sqrt{\frac{50^2}{2} + 37{,}5^2} = -70\ \text{kgf/cm}^2\ \text{(compression)}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} = \frac{2\cdot 37{,}5}{50} = 1{,}5, \quad \text{d'où} \quad \varphi = 28°10',$$

ici φ est l'angle d'inclinaison des lignes de force des contraintes principales σ_2 au centre de l'éprouvette par rapport à l'axe x-x.

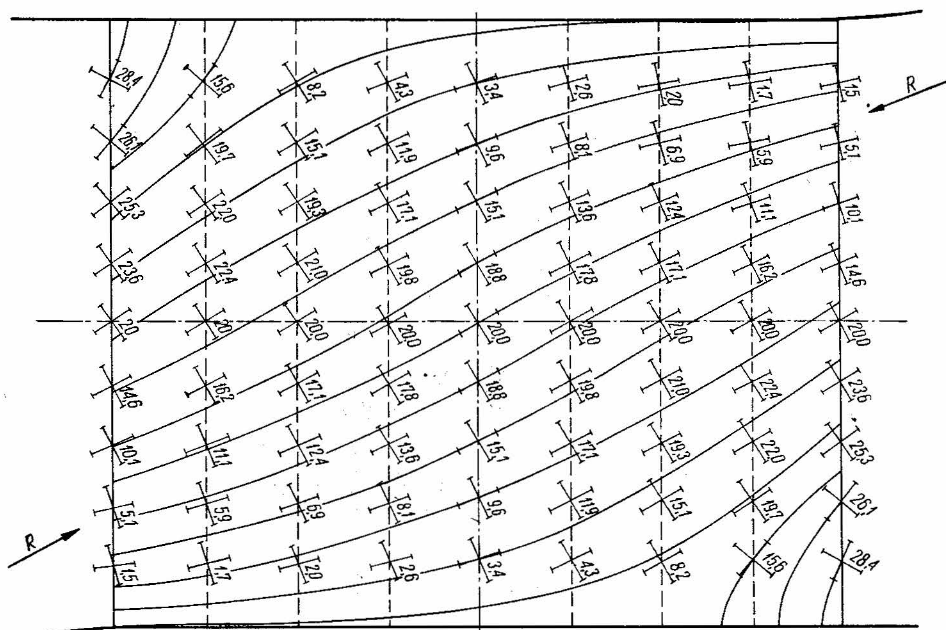


Fig. 2-16. Disposition des lignes de force des contraintes principales dans la partie centrale de l'éprouvette représentée sur la figure 2-15 [63] ; les nombres indiquent les valeurs de σ_1

La rupture de l'éprouvette s'est produite sous l'effort $R = 110\,000$ kgf, donc sous les contraintes:

$$\sigma_x = 98{,}4 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = 73{,}8 \text{ kgf/cm}^2.$$

es contraintes principales étaient:

$$\sigma_1 = 39{,}5 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = -137{,}9 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les résultats des essais de MÖRSCH comparés au critère de MOHR sont présentés sur la figure 2-17.

Si l'on tient compte du fait que dans les essais du même béton à la traction uni-axiale MÖRSCH a obtenu la résistance $\sigma' = 33$ kgf/cm², la rupture du béton sous la contrainte $\sigma_1 = 39{,}5$ kgf/cm², avec la contrainte $\sigma_2 = -137{,}9$ kgf/cm² appliquée simultanément, prouve que la contrainte principale de compression demeure dans certaines limites (dans le cas examiné, jusqu'à 3,6 σ') sans influence sur la valeur de σ'. Cette constatation, connue dans la littérature allemande comme « le phénomène de MÖRSCH », exclut la possibilité d'employer pour le béton ces critères de rupture qui sont basés sur la dilatation constante limite ε_{max}, comme sur la mesure de la sollicitation. De même, la possibilité est exclue d'une analyse valable de la sollicitation du béton déduite de la notion des contraintes dites réduites

$$\sigma_{red} = \sigma'_b + \frac{\sigma_b}{m}\,\frac{E'_b}{E_b}. \tag{2.25}$$

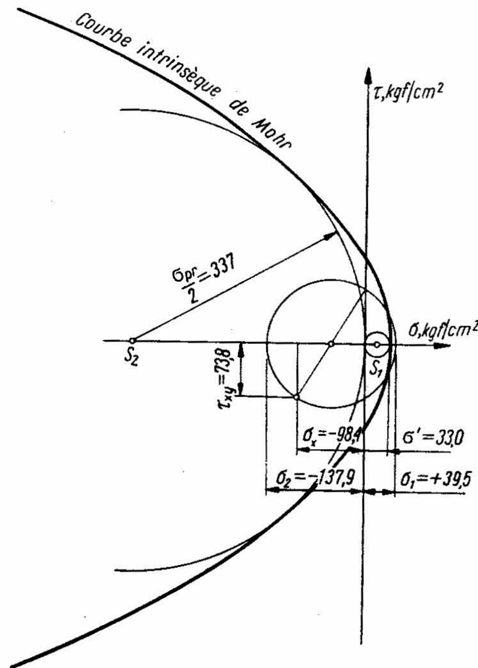


Fig. 2-17. Résultats des essais de MÖRSCH comparés avec l'hypothèse de MOHR

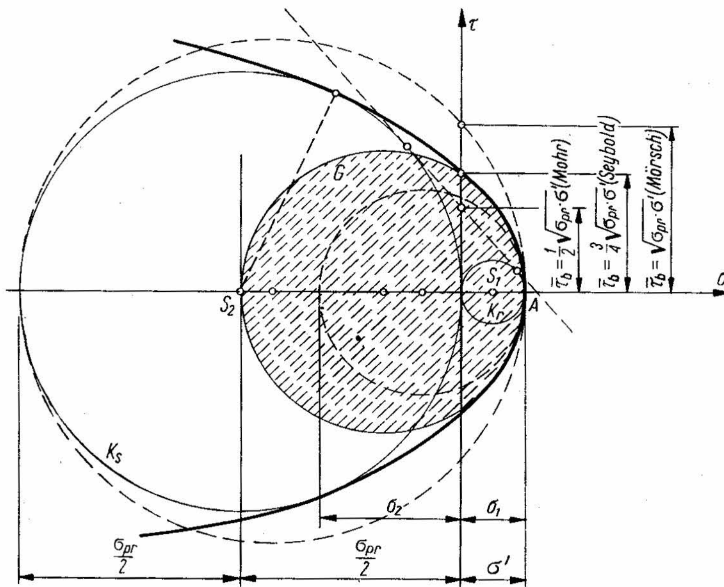


Fig. 2-18. Résistance du béton au cisaillement $\bar{\tau}_b$ et problème de la contrainte réduite, comparés avec l'hypothèse de MOHR

Contrairement aux autres critères de rupture, l'hypothèse de MOHR semble formuler de manière assez juste ce phénomène singulier observé par MÖRSCH. Pour expliquer cette question, regardons la figure 2-18, qui a été dessinée pour un cas assez fréquent pour le béton quand le rapport $\frac{\sigma_{pr}}{\sigma'} = 10$. Il résulte de l'analyse graphique de la sollicitation du béton que, dans l'état plan des contraintes σ_1, σ_2, la rupture se produira sous la contrainte $\sigma_1 = \sigma'$ jusqu'au moment où le cercle de MOHR sortira de la zone hachurée G, la contrainte σ_2 ne diminuant pas la résistance σ' dans cette zone. Ainsi, les essais de MÖRSCH, qui était un antagoniste convaincu du critère de MOHR, ont participé à étendre la popularité de ce critère.

2.3.3. ESSAIS DE ROŠ ET EICHINGER

C'est à l'E.M.P.A., à Zurich [71], que ROŠ et EICHINGER ont réalisé les plus vastes recherches sur les états limites des matériaux fragiles dans un état de contrainte à trois dimensions.

Ils ont répété les essais de KARMAN en les étendant à d'autres matériaux fragiles, tels que la fonte, la résine et la pâte de ciment. Dans deux cas ils ont obtenu des résultats d'où il a été possible de déduire l'identité des courbes intrinsèques pour les divers états de contrainte ; cependant, dans quatre cas ils ont trouvé des résultats contraires. Par exemple, ils ont constaté, d'après les essais effectués sur la pâte de ciment soumise à une traction et une compression avec une pression hydrostatique simultanée, que les courbes intrinsèques se croisaient. Dans les cas de contraintes faibles la courbe intrinsèque de traction était située au-dessus et pour les contraintes plus élevées, au-dessous de la courbe de compression. D'après ces essais, ROŠ et EICHINGER ont constaté que l'influence de la contrainte principale moyenne σ_2 avait lieu sur la rupture des matériaux fragiles, mais que cette influence n'était pas toujours la même. En fonction du type de matériau fragile, la contrainte principale moyenne peut augmenter ou diminuer la sollicitation du matériau, ou bien elle peut rester sans influence. Pourtant, cette influence n'est pas importante d'après ROŠ et EICHINGER et pour les matériaux fragiles elle ne dépasse pas 15 %. Les résultats des essais de ROŠ et EICHINGER pour la pâte de ciment sont présentés sur la figure 2-19 sous la forme du critère de MOHR.

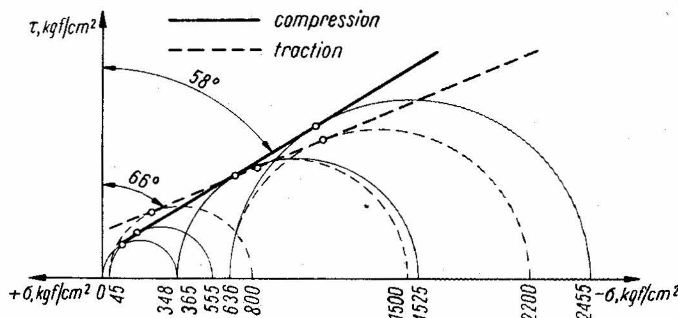


Fig. 2-19. Résultats des essais de ROŠ et EICHINGER effectués sur la pâte de ciment soumise à une compression tri-axiale [71]

2.3.4. ESSAIS DE BRESLER ET PISTER

Bresler et Pister ont effectué leurs essais [13] [14] sur des cylindres en béton soumis simultanément à une torsion et à une compression le long des génératrices du cylindre. Le critère de la rupture obtenu comme résultat de ces essais s'exprime par la formule (2.26) dont la représentation graphique est donnée par la figure 2-20

$$\frac{\tau}{\sigma_{pr}} = 0,1\left[0,62+7,86\left(\frac{\sigma}{\sigma_{pr}}\right)-8,46\left(\frac{\sigma}{\sigma_{pr}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.26)$$

L'équation (2.26) n'est pas valable pour l'état de contrainte à trois dimensions. Par conséquent, elle ne peut pas être utilisée dans le voisinage d'un appui et d'une charge concentrée.

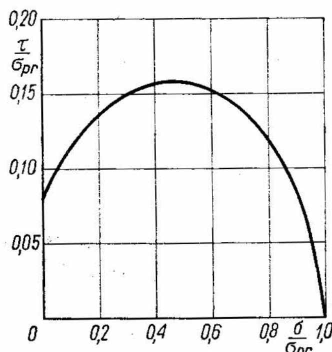


Fig. 2-20. Représentation graphique de l'équation (2.26), d'après Bresler et Pister

2.3.5. ESSAIS DE McHENRY ET KARNI

Les essais ont été réalisés sur des cylindres en béton soumis à une traction par l'intérieur au moyen d'un fluide avec une compression simultanée suivant l'axe du cylindre [57].

Contrairement aux essais de Bresler et Pister, effectués sur des éprouvettes de même résistance, McHenry et Karni ont réalisé leurs expériences sur trois bétons dont les résistances étaient différentes. Ils ont constaté que la diminution de la résistance à la traction a eu lieu même avec des contraintes de compression relativement peu élevées.

2.3.6. ESSAIS DE LA RÉSISTANCE DU BÉTON À LA COMPRESSION BI-AXIALE

Le problème de la résistance du béton soumis à deux contraintes principales négatives quand la troisième est égale à zéro peut apparaître dans l'examen du cisaillement dans les constructions précontraintes. C'est la raison pour laquelle ce problème mérite au moins de brèves considérations.

L'étude de la résistance du béton avec aggrégats fins soumis à la compression dite plane a été entreprise par Föppl [20] déjà en 1896. Il a effectué ses essais sur des prismes en mortier, chargés suivant deux directions. Pour éliminer l'influence du frottement sur les faces chargées, celles-ci ont été recouvertes d'une couche d'un mélange de stéarine et de talc. Après avoir éliminé le frottement par cette méthode, Föppl a obtenu les mêmes résistances à la compression uni-axiale et bi-axiale. Par contre, le frottement une fois éliminé, la résistance bi-axiale s'avérait deux fois plus petite que la résistance sous la charge uni-axiale avec frottement dans les plans chargés. Roš et Eichinger, en discutant les essais de Föppl, ont constaté que cette diminution de la résistance était produite par les efforts de désintégration dans la couche intermédiaire destinée à l'élimination du frottement.

Roš et Eichinger, dans leurs recherches, ont étudié également la résistance à la compression dans un état plan de contrainte. D'après les essais effectués sur des cylindres en marbre chargés dans le sens du rayon, ils ont conclu que la résistance à la compression plane où $\sigma_1 = \sigma_2$ est supérieure de 30 % environ par rapport à la résistance sous la charge axiale.

Parmi les études plus récentes il faut remarquer les essais de Głomb, de Weigler et Becker et de Hilsdorf.

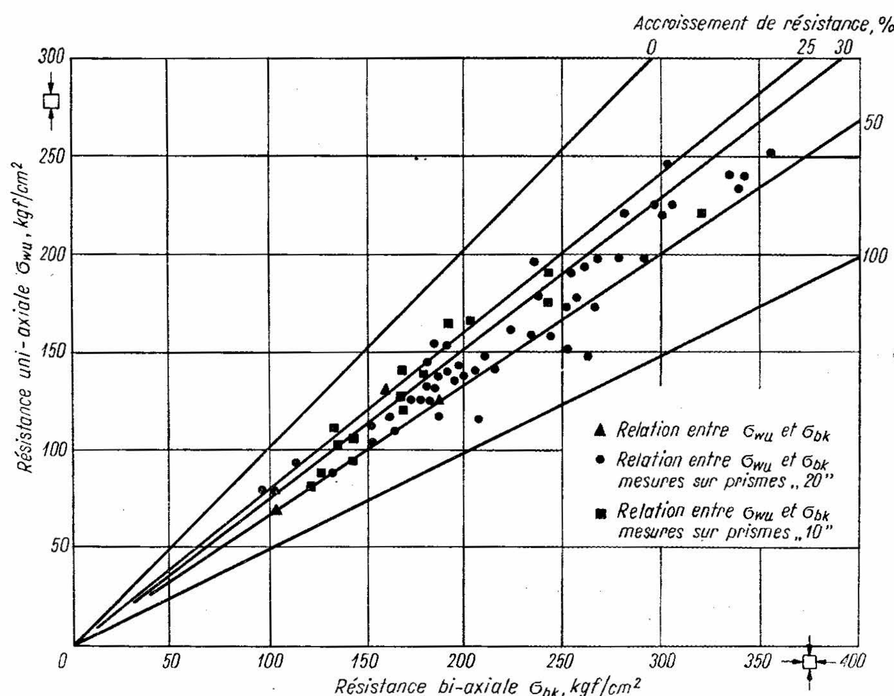


Fig. 2-21. Résultats des essais de J. Głomb [27]

Głomb [27] a étudié la résistance du béton soumis à une compression bi-axiale avec le rapport $\sigma_1 : \sigma_2$ variable; les essais ont été effectués sur un vérin spécialement adapté. Les essais de la première partie concernaient les prismes 10×10×10 cm et 20×20×20 cm, comprimés suivant deux axes. Le frottement dans les plans chargés a été éliminé par des couches minces de paraffine.

Les résultats des essais de Głomb indiquent que la résistance à la compression bi-axiale, désignée par le symbole σ_{bk}, est plus grande que la résistance à la compression axiale σ_{wu} de 25 à 50 % dans le cas où $\sigma_1 : \sigma_2 = 1$. Les résultats de cette partie des essais sont indiqués sur la figure 2-21.

Dans la deuxième partie des essais [28] Głomb étudiait la résistance à la compression plane bi-axiale non seulement pour le rapport $\sigma_1 : \sigma_2 = 1$, mais également pour le rapport $\sigma_2 : \sigma_1 = 0,5$. Les essais de cette partie ont été effectués suivant 13 séries; chaque série contenait 25 éprouvettes, à savoir : 9 prismes de 20 cm de côté, 8 plaques 20×20×10 cm et 8 plaques 20×20×5 cm. Les charges du vérin ont été appliquées simultanément sur les

deux faces horizontales et les deux faces verticales. Pour éliminer l'influence du frottement les faces chargées de toutes les éprouvettes étudiées ont été recouvertes d'une double couche d'un mélange de paraffine et d'huile lubrifiante. On a examiné ainsi deux sortes de béton :

a) les bétons à faible résistance — $\sigma_{wu} = 110$ kgf/cm² environ,

b) les bétons à forte résistance — $\sigma_{wu} = 300$ kgf/cm² environ.

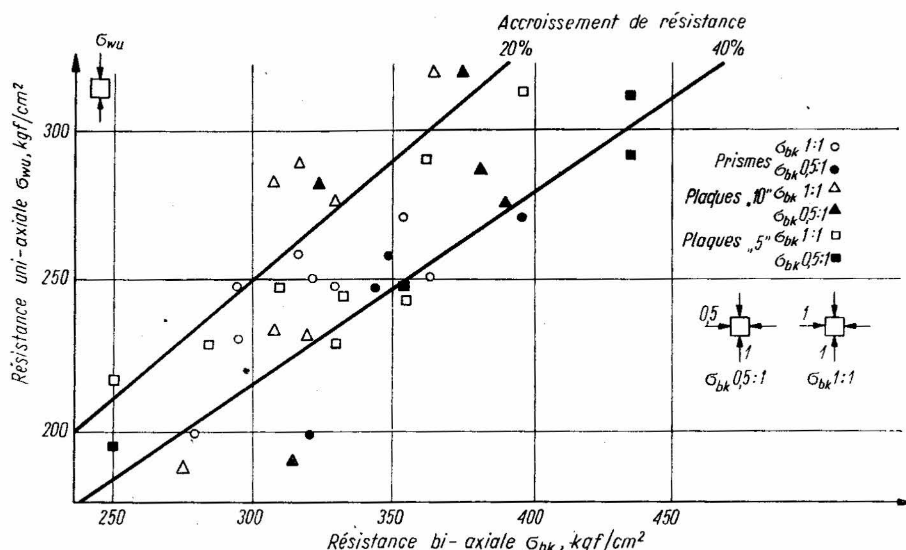


Fig. 2-22. Diagramme de la relation entre σ_{wu} et σ_{bk} pour le béton caractérisé par $\sigma_{wu} \approx$ ≈ 300 kgf/cm², d'après J. Głomb, [28]

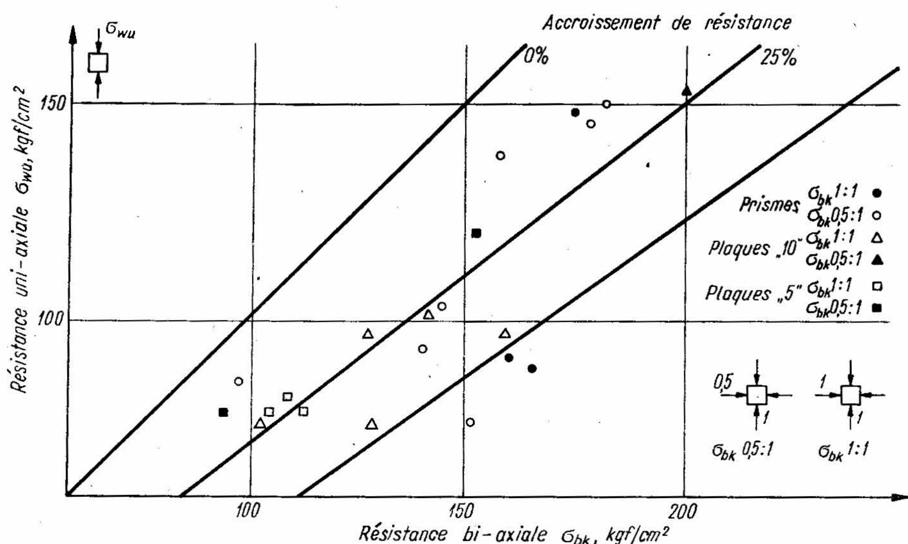


Fig. 2-23. Diagramme de la relation entre σ_{wu} et σ_{bk} pour le béton caractérisé par $\sigma_{wu} \approx$ ≈ 110 kgf/cm², d'après J. Głomb [28]

Les résultats de la seconde partie des essais de GŁOMB sont représentés sur les figures 2-22 et 2-23. Chaque point dans les diagrammes correspond aux essais de quatre éprouvettes au minimum.

D'après les résultats présentés il découle que, pour toutes les sortes d'éléments examinés (prismes ou plaques), la résistance à la compression bi-axiale σ_{bk} est nettement plus élevée que la résistance à la compression axiale σ_{wu}, et que cette augmentation de la résistance est égale à 40 % environ pour le rapport $\sigma_2:\sigma_1 = 0,5$, tandis qu'elle est moins importante pour le rapport $\sigma_2:\sigma_1 = 1,0$, pour lequel elle ne s'élève qu'à 24,3 %.

Le diagramme de la figure 2-24, établi d'après les résultats des essais de GŁOMB, montre dans le système de coordonnées σ_1, σ_2 l'allure probable des courbes intrinsèques pour le béton de faible résistance $\sigma_{wu} = 110$ kgf/cm² et pour le béton fort $\sigma_{wu} = 300$ kgf/cm².

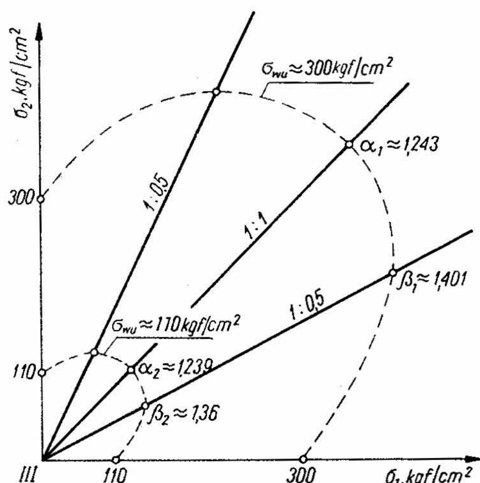


Fig. 2-24. Courbes intrinsèques pour les bétons de $\sigma_{wu} \approx 110$ kgf/cm² et $\sigma_{wu} \approx 110$ kgf/cm² soumis à une compression bi-axiale. Les coefficients α et β déterminent l'augmentation de la résistance dans l'état bi-axial par rapport à la résistance uni-axiale, [28]

WEIGLER et BECKER [83] ont formulé des critiques contre l'élimination du frottement par des lubrifiants dans les plans chargés. Sur la base de nombreux essais préliminaires ils ont constaté que si l'on remplace les prismes par des plaques suffisamment minces, le frottement sur les faces de bord n'a pas d'influence considérable sur la résistance.

Les essais ont été réalisés sur des petites plaques de dimensions 100×100×25 mm coulées en six sortes de béton de résistances différentes. D'après ces essais, WEIGLER et BECKER ont constaté, de même que GŁOMB, une augmentation de la résistance à la compression bi-axiale par rapport à la résistance à la compression axiale. L'accroissement extrême de 30 à 45 % a été observé pour les rapports des contraintes dans les limites suivantes :

$$1:2,4 < (\sigma_1:\sigma_2) < 1:1.$$

De plus, ils ont constaté une augmentation de la résistance dans les éléments soumis à une contrainte préalable de l'ordre de 0,75 σ_{pr}. L'augmentation de la résistance ainsi produite était comprise entre 6 et 13 % dans l'état axial de contrainte, et entre 10 et 25 % dans l'état bi-axial. Les courbes intrinsèques pour trois bétons différents et pour la pâte de ciment obtenues d'après les essais [83] sont représentées sur la figure 2-25.

Toutes les recherches expérimentales mentionnées ci-dessus, faites en vue de déterminer la résistance du béton dans l'état plan de contrainte, ont été critiquées par H. HILSDORF [34]. Dans une analyse théorique il est arrivé à la conclusion que, pour des raisons purement techniques, il est très difficile de créer un état plan de contrainte, défini de manière univoque. Dans la zone d'application des charges, vu la rigidité de l'élément transmettant

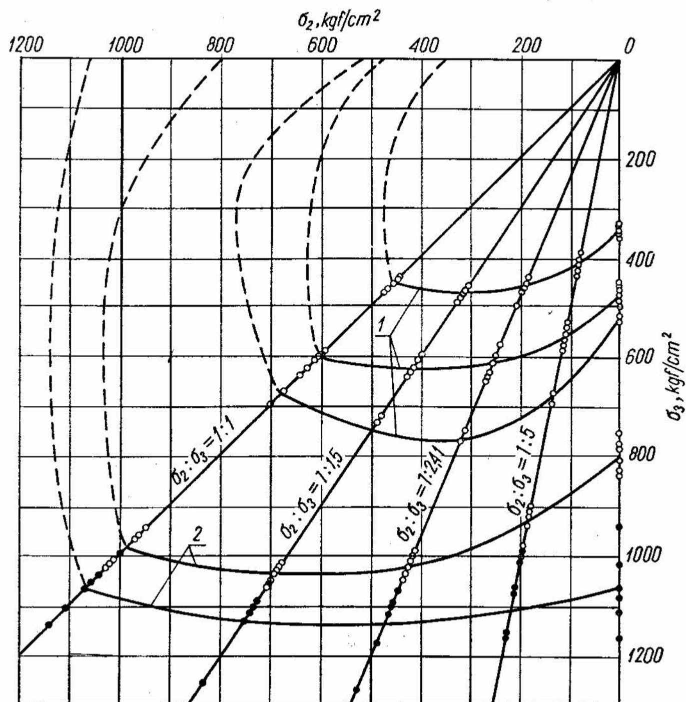


Fig. 2-25. Résultats des essais de WEIGLER et BECKER [83]

1 — courbes intrinsèques pour le béton ; 2 — courbes intrinsèques pour la pâte de ciment

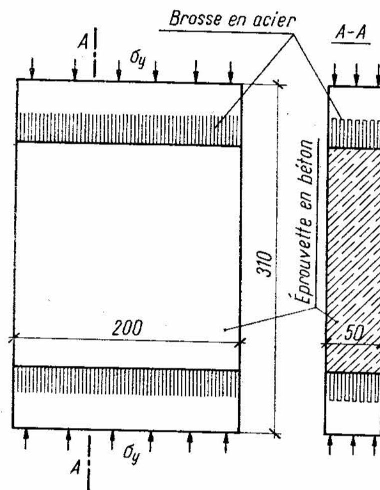


Fig. 2-26. Brosse en acier pour la mise en charge des éprouvettes, d'après HILSDORF [34]

les charges du vérin au béton, il apparaît un état de contrainte à trois dimensions; ceci produit l'augmentation de la résistance du béton. Selon HILSDORF, sur la base des résultats des essais acquis jusqu'à maintenant il n'est pas possible de déterminer d'une façon correcte la résistance dite plane.

D'après HILSDORF, les plaques carrées sont les mieux adaptées à l'examen de la résistance bi-axiale parmi tous les éléments utilisés dans ces essais. Ceci est valable à condition que la charge extérieure soit appliquée de manière à éviter les contraintes dites forcées (Zwangsspannungen). De plus, HILSDORF attire l'attention sur le fait qu'une partie de la charge extérieure est supportée par la structure de l'appareil de mise en charge à cause du frottement entre l'acier et le béton. Dans cette situation, le quotient de l'effort extérieur par la surface de l'éprouvette donne une valeur trop élevée de la contrainte ainsi déterminée.

Pour trouver la résistance plane correcte du béton, HILSDORF propose de charger les éprouvettes en forme de plaques carrées à l'aide d'une brosse en acier (fig. 2-26). Une telle brosse doit se caractériser par une grande rigidité dans le sens de l'effort et elle doit être en même temps flexible dans le sens perpendiculaire.

Ce dispositif laisse apparaître des déformations transversales libres également dans le plan d'application de la charge, cé qui permet, selon HILSDORF, d'obtenir l'état plan « pur» de contrainte dans l'éprouvette étudiée. Les essais de HILSDORF réalisés de cette manière ont montré que la résistance bi-axiale σ_{bk}, égale dans les essais de WEIGLER et BECKER à environ 1,37 σ_{wu}, se trouve réduite à 1,12 σ_{wu} environ.

2.3.7. ESSAIS DE GODYCKI-ĆWIRKO

En 1963, l'auteur a effectué des essais de cisaillement sur des poutres en béton armé de résistances $\sigma^0_{cyl} = 300$ kgf/cm² et $\sigma^0_{cyl} = 185$ kgf/cm². Les résultats de ces essais sont présentés dans la publication [24] ainsi qu'au sous-chapitre 5.7 du présent ouvrage.

La disposition des fissures et l'analyse de la résistance dans la zone de cisaillement d'une poutre rectangulaire en béton de $\sigma^0_{cyl} = 185$ kgf/cm² sont données par la figure 2-27.

On peut observer que la première fissure inclinée suivant la ligne où les contraintes σ_x s'annulent est apparue sous l'effort $P = 2{,}9$ tf (zone M). L'état de contrainte dans cette zone au moment de la fissuration est représenté par le cercle limite de MOHR désigné par le symbole K_3. Ce cercle n'est pas tangent à la courbe intrinsèque de MOHR, mais après une légère augmentation de son diamètre le point de tangence se trouverait sur l'axe des abscisses. D'après le critère de MOHR ceci signifie que la fissure doit avoir lieu dans la section où la contrainte de cisaillement $\tau = 0$. Par conséquent, il s'agit ici exclusivement d'une fissure de séparation, inclinée à 45° par rapport à l'axe de la poutre, ce qui est confirmé par l'expérience.

Pour une augmentation ultérieure de la charge, on a pu observer une autre zone semblable N, où une fissure de même sorte est apparue sous un effort beaucoup plus élevé, $P = 3{,}9$ tf. L'état de contrainte dans la zone N au moment de la fissuration est représenté par le cercle limite K_4 qui coupe la courbe intrinsèque de MOHR en deux points (fig. 2-27). La fissuration au point N est apparue sous des contraintes de cisaillement τ beaucoup plus élevées ; ceci peut être expliqué par la non-homogénéité de la structure du béton et également par l'influence éventuelle des étriers. Les étriers s'opposent aux déformations transversales du béton, ce qui crée souvent un état hétérogène de contrainte à trois dimensions.

Les considérations ci-dessus semblent indiquer que, dans le cas des poutres en béton armé avec armature transversale, il est difficile de définir la sollicitation en employant une courbe intrinsèque en forme de droite ou de courbe comme MOHR et LEON l'ont proposé pour le béton non armé.

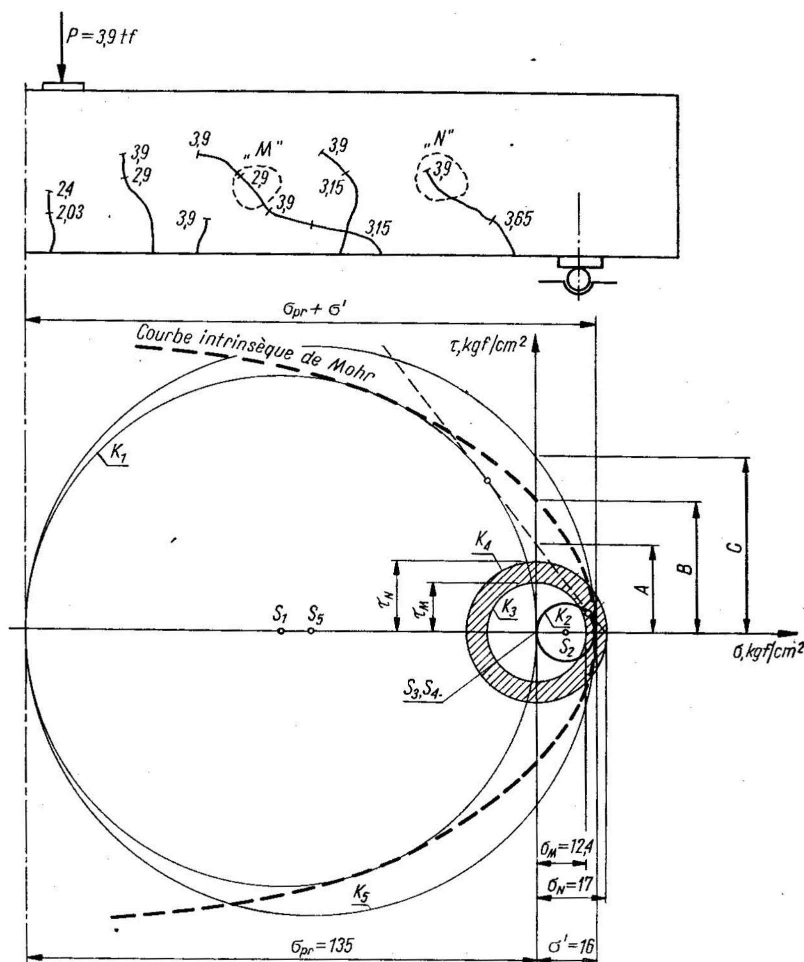


Fig. 2-27. Analyse de la résistance d'une poutre en béton de $\sigma^0_{cyl} = 185$ kgf/cm² d'après les essais de GODYCKI-ĆWIRKO, comparée avec l'hypothèse de MOHR ; K_1 — cercle limite de compression axiale ; K_2 — cercle limite de traction axiale ; K_3 — cercle limite des contraintes au point M sous la charge $P = 2{,}9$ tf ; K_4 — cercle limite des contraintes au point N sous la charge $P = 3{,}9$ tf
Les segments A, B, C représentent les valeurs de la résistance au cisaillement, respectivement d'après MOHR, SEYBOLD et MÖRSCH

Dans l'opinion de l'auteur, en conservant le critère de rupture de MOHR on peut remplacer la courbe intrinsèque par une zone limite, dans laquelle les cercles de MOHR peuvent se déplacer en fonction de l'homogénéité du béton, de la disposition et du type d'armatures

longitudinale et transversale, et également en fonction de la contrainte moyenne qui était jusqu'à maintenant négligée dans la théorie de MOHR. Ainsi formulée, l'analyse de la rupture d'un matériau est une généralisation du critère de MOHR et elle est représentée sur la figure 2-28. Il est à observer dans ce graphique que la zone limite est la plus étroite pour la fissure de séparation ($\tau = 0$). Elle devient plus large avec les contraintes tendant

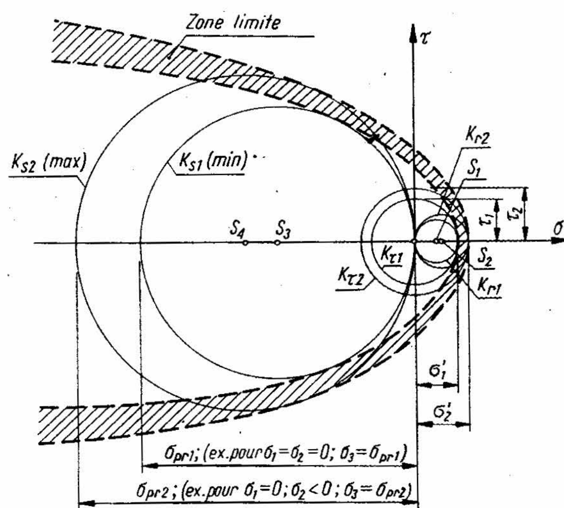


Fig. 2-28. Hypothèse de MOHR généralisée selon la proposition de GODYCKI-ĆWIRKO

vers l'état de la pression hydrostatique, état où les dispersions rencontrées dans les essais sont plus importantes.

Il est encore prématuré de formuler ce problème analytiquement, car on ne dispose pas encore d'un nombre suffisant de résultats expérimentaux des essais de la résistance du béton dans l'état complexe de contrainte.

3. ANALYSE DU CISAILLEMENT D'APRÈS LA MÉTHODE CLASSIQUE

3.1. CALCUL DES CONTRAINTES DUES AUX EFFORTS TRANCHANTS

La détermination des valeurs maximales des tensions principales peut être ramenée au calcul des contraintes de cisaillement τ au niveau de l'axe neutre, à condition d'y admettre les simplifications présentées en détail au chapitre 2.

Pour définir ces contraintes, MÖRSCH a retenu comme base les équations d'équilibre des efforts.

3.1.1. SECTION RECTANGULAIRE

Considérons l'équilibre d'un élément de la poutre de longueur $\mathrm{d}l$ et de largeur b (fig. 3-1). L'effort tranchant sur la longueur CC' doit équilibrer l'accroissement de l'effort normal sur la longueur $A'C'$, produit par l'accroissement des contraintes σ. Par conséquent, on a

$$\tau b \mathrm{d}l = \int_{v}^{x} b \mathrm{d}y \mathrm{d}\sigma. \tag{3.1}$$

Les contraintes de compression de la fibre supérieure de la poutre rectangulaire, dues à la flexion, sont déterminées dans la théorie classique par la formule

$$\sigma_{br} = \frac{2M}{bx\left(h - \dfrac{x}{3}\right)}.$$

D'où on a

$$\sigma = \frac{y}{x}\sigma_{br} = \frac{2My}{bx^2\left(h - \dfrac{x}{3}\right)},$$

et également

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{2y\mathrm{d}M}{bx^2\left(h - \dfrac{x}{3}\right)}.$$

En utilisant la relation $T = \frac{dM}{dl}$, nous pouvons écrire

$$d\sigma = \frac{2yT\,dl}{bx^2\left(h - \frac{x}{3}\right)}.$$

Nous portons cette relation dans la formule (3.1) et nous obtenons

$$\tau b\,dl = \frac{2T\,dl}{x^2\left(h - \frac{x}{3}\right)} \int_v^x y\,dy = \frac{2T\,dl}{x^2\left(h - \frac{x}{3}\right)}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right),$$

d'où il vient

$$\tau = \frac{T(x^2 - v^2)}{bx^2\left(h - \frac{x}{3}\right)}. \tag{3.2}$$

La formule (3.2) énonce que les contraintes de cisaillement du bord supérieur (pour $v = x$) sont égales à zéro ; elles augmentent suivant la loi parabolique pour atteindre au niveau de l'axe neutre (pour $v = 0$) la valeur suivante

$$\tau_0 = \frac{T}{b\left(h - \frac{x}{3}\right)} = \frac{T}{bz}, \tag{3.3}$$

où : z désigne le bras de levier du couple des forces élastiques,
b désigne la largeur d'une section rectangulaire de la poutre.

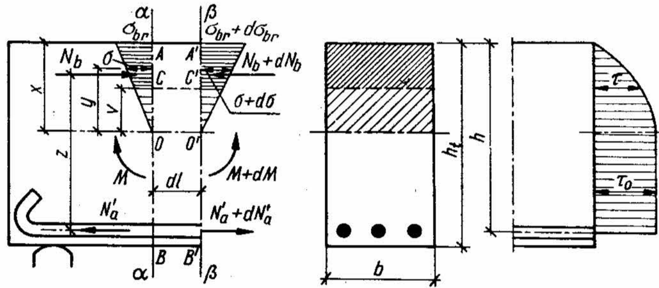


Fig. 3-1. Contraintes σ et τ dans un élément de longueur dl découpé dans une poutre rectangulaire

En admettant que le béton ne peut pas transmettre les contraintes de traction, nous supposons que toutes les sections C—C' situées au-dessous de l'axe neutre sont soumises au même effort tranchant que celui dans la section O—O' située au niveau de l'axe neutre. Cet effort est ensuite transmis par l'adhérence sur les barres de l'armature. Il en résulte que la valeur de l'effort de traction dans l'armature varie de N à $N+dN$ et le diagramme des contraintes τ prend la forme présentée par la figure 3-1. L'effort tranchant correspondant à l'unité de

longueur $b\tau_0$ produit les contraintes sur la surface des barres, dont la valeur peut être calculée d'après la formule suivante, dans le cas des barres de même diamètre :

$$\tau_d = \frac{\tau_0 b}{p_a m}; \qquad (3.4)$$

où : m = nombre des barres,

p_a = périmètre d'une barre.

Dans le cas de diamètres différents des barres, l'effort tranchant est réparti proportionnellement à l'aire de la section droite de chaque barre.

3.1.2. SECTION EN FORME DE T

Dans les poutres de section en forme de T, l'axe neutre où les contraintes σ_x s'annulent est situé le plus souvent près du bord inférieur du hourdis, conformément à la figure 3-2. Pour une épaisseur constante de l'âme, les contraintes de cisaillement ont les mêmes valeurs dans toutes les sections horizontales $C—C'$ au-dessous de l'axe neutre, cette valeur étant définie par l'accroissement de l'effort dN_b. Nous supposons ici que l'effort N_b est horizontal, $N_b = N_{bx}$.

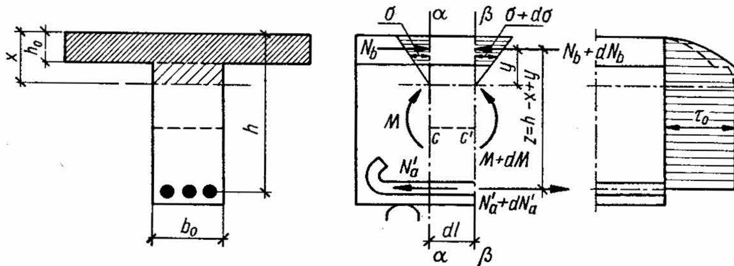


Fig. 3-2. Contraintes σ et τ dans un élément de longueur dl découpé dans une poutre en forme de T

D'après la condition d'équilibre des projections des efforts sur l'axe horizontal, il vient (fig. 3-2) :

$$b_0 \tau_0 \mathrm{d}l = \mathrm{d}N_b,$$

ou bien

$$b_0 \tau_0 = \frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}l}.$$

Etant donné que

$$N_b = \frac{M}{(h-x+y)},$$

on a

$$\frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}l} \frac{1}{(h-x+y)} = \frac{T}{h-x+y}.$$

Finalement nous obtenons

$$\tau_0 = \frac{T}{b_0(h-x+y)} = \frac{T}{b_0 z}.$$

Pour les sections en forme de T on peut employer la formule suivante, suffisamment précise pour les calculs pratiques

$$\tau_0 = \frac{T}{b_0\left(h - \frac{h_0}{2}\right)}. \tag{3.5}$$

Les contraintes d'adhérence τ_d sont déterminées par la formule (3.4) dans le cas des barres de même diamètre dans l'âme. Dans le cas de diamètres différents, la contrainte $\tau_{d\,max}$ sur la surface de la barre la plus épaisse est donnée par la formule

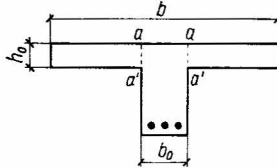


Fig. 3-3. Plans a—a' exposés à l'effort tranchant horizontal dans une poutre en forme de T

$$\tau_{d\,max} = \frac{b_0 \tau_0}{A'_a} \frac{d_{max}}{4}, \tag{3.6}$$

où : A'_a = aire totale des barres,

d_{max} = diamètre de la barre la plus épaisse.

L'effort tranchant horizontal, correspondant à l'unité de longueur de la nervure ($\tau_0 b_0$), agit également d'une façon importante dans les sections verticales a–a' où le hourdis est associé à la nervure, (fig. 3-3).

En supposant une répartition uniforme des contraintes de cisaillement dans les sections a—a', nous obtiendrons une valeur moyenne de ces contraintes donnée par la formule

$$\tau = \frac{b_0 \tau_0}{2h_0} \frac{b - b_0}{b}. \tag{3.7}$$

3.1.3. POUTRE DE HAUTEUR VARIABLE

La détermination exacte des contraintes devient un problème compliqué dans les poutres de hauteur variable, étant donné que les contraintes de compression de béton près du bord oblique sont parallèles à ce bord, tandis que les contraintes des barres de l'armature correspondent à peu près à la direction des axes de ces barres. Afin de simplifier la déduction des formules déterminant τ_0, on ne considère que les sections planes et verticales, évitant ainsi l'examen des sections chargées de façon dissymétrique.

Sur la figure 3-4 on a représenté les quatre cas les plus fréquents dans la pratique où la hauteur des poutres en béton armé est linéairement variable. Si l'on suppose dans tous ces cas que les efforts sont appliqués horizontalement, on obtient

$$N_b = N'_a = \frac{M}{z}.$$

Pour un bras de levier variable, on a

$$dN'_a = \frac{z\,dM - M\,dz}{z^2}$$

ou bien

$$\frac{dN'_a}{dl} = \frac{1}{z}\frac{dM}{dl} - \frac{M}{z^2}\frac{dz}{dl}. \tag{3.8}$$

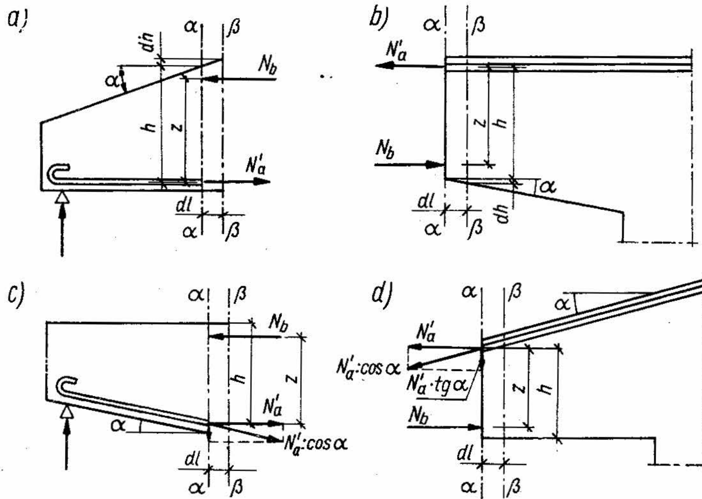


Fig. 3-4. Efforts intérieurs dans des sections de poutres en béton armé de hauteur linéairement variable

Dans tous ces cas nous avons

$$b_0 \tau_0 = \sum p_a \tau_d \, dl = dN'_a,$$

où: $\sum p_a$ = périmètre des barres,
τ_d = contrainte d'adhérence.

Comme bras de levier nous prenons $z \approx \frac{7}{8}h$, d'où il vient

$$\frac{dz}{dl} = \frac{7}{8}\frac{dh}{dl} - \frac{7}{8}\text{tg}\alpha.$$

On peut remplacer la formule $\frac{dz}{dl} = \frac{7}{8}\text{tg}\alpha$ par la relation plus précise

$$\frac{dz}{dl} = \frac{z}{h}\frac{dh}{dl} = \frac{z}{h}\text{tg}\alpha.$$

En substituant dans la formule (3.8) les valeurs déterminées pour

$$\mathrm{d}N'_a, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l} \quad \text{et} \quad T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}l}, \text{ nous obtiendrons}$$

$$b_0\tau_0 = \sum p_a\tau_d = \frac{T}{z} - \frac{M}{z^2}\frac{z}{h}\mathrm{tg}\alpha,$$

et finalement on trouve

$$\tau_0 = \frac{T}{b_0 z} - \frac{M\mathrm{tg}\alpha}{b_0 zh}. \tag{3.9}$$

Quand h diminue, M croissant, il faut remplacer le signe $(-)$ dans la formule (3.9) par le signe $(+)$.

L'influence positive des goussets est expliquée par les figures 3-4 c et d, où la composante verticale de traction de l'armature diminue l'effort tranchant, transmis sur le béton, d'une valeur égale à $N'_a\mathrm{tg}\alpha$. Dans les cas a et b (fig. 3-4) les goussets diminuent également les contraintes τ_0, mais cette influence s'effectue un peu différemment que dans les cas c et d. Pour examiner ces cas, considérons les contraintes de compression sur les bords en les déterminant dans une section verticale d'après la formule connue

$$\sigma_{br} = \frac{2M}{b_0 x\left(h - \frac{x}{3}\right)}.$$

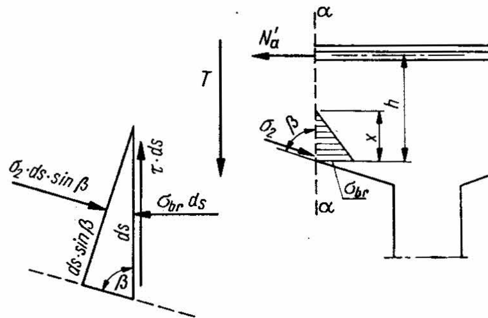


Fig. 3-5. Contraintes dans une section verticale d'une poutre munie de goussets sur l'appui

Dans une poutre de hauteur constante cette contrainte est égale à la contrainte principale de bord σ_2. Par contre, dans le cas des goussets, les contraintes principales de compression σ_2 sont supérieures et peuvent être déterminées d'après la condition d'équilibre d'un élément triangulaire, découpé près du bord (fig. 3-5).

De la condition $\sum X = 0$, il vient

$$\sigma_{br}\mathrm{d}s = \sigma_2 \mathrm{d}s \sin\beta \sin\beta$$

et ensuite

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{br}}{\sin^2\beta}. \tag{3.10}$$

La contrainte σ_2 parallèle au bord du gousset est donc selon le rapport $\frac{1}{\sin^2\beta}$ supérieure à des contraintes calculées σ_{br}. D'habitude cette augmentation des contraintes du béton est négligée dans les calculs pratiques, malgré le fait que dans le cas des goussets inclinés à 1/3 elle est égale à 11 %.

La condition $\sum Y = 0$ nous fournit l'équation suivante

$$\tau \mathrm{d}s = \sigma_2 \mathrm{d}s \sin\beta \cos\beta,$$

d'où il vient

$$\tau = \sigma_{br} \cot\beta. \tag{3.11}$$

Cette équation indique que les contraintes de cisaillement du bord comprimé non seulement ne sont pas égales à zéro, mais par contre qu'elles peuvent atteindre des valeurs importantes. Par exemple, dans le cas du gousset incliné à 1/3 et $\sigma_{br} = 100$ kgf/cm², nous obtiendrons $\tau \approx 33{,}5$ kgf/cm². De cette façon, la zone comprimée du béton près du bord d'un gousset supporte une partie de l'effort tranchant et ainsi le cisaillement dans la zone tendue est diminué. Ceci découle de la formule (3.9) où la contrainte de cisaillement τ_0 est diminuée. Il faut remarquer que les contraintes τ du bord d'un gousset ne peuvent pas être considérées d'une manière univoque avec les contraintes τ_0 dans la zone tendue. Egalement, on ne peut pas comparer les contraintes τ_0 avec les contraintes de cisaillement dans un plan incliné à 45° par rapport à l'axe d'un poteau axialement comprimé.

3.2. DISTRIBUTION EFFECTIVE DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

La distribution effective des contraintes de cisaillement τ_{xy} peut être déterminée dans le cas où d'après les mesures des déformations on peut définir la distribution des contraintes σ_x dans deux sections transversales voisines. Par exemple, la contrainte « τ effective » dans le plan C—C' (fig. 3-1) peut être trouvée quand on connaît la somme des différences des contraintes σ_x dans les sections AC et $A'C'$ situées au-dessus du plan horizontal C—C'

$$\tau_{C-C'} \text{ effective} = \frac{\sum \Delta\sigma_{effective} \Delta F}{b \Delta l}. \tag{3.12}$$

Dans son examen du problème, Mörsch a constaté que la forme effective du diagramme des contraintes de cisaillement dépend non seulement de la forme de la section transversale mais également de la nature de l'armature et de l'importance du moment fléchissant. La distribution effective des contraintes τ dans une section rectangulaire d'une poutre simplement appuyée et chargée par deux forces concentrées situées symétriquement à 1/3 de la portée est représentée sur la figure 3-6.

Les diagrammes des contraintes effectives τ dessinés suivant les lignes continues ont été trouvés pour l'effort tranchant constant $T = 1780$ kgf et pour des moments fléchissants variables de $M = 880$ kgfm à $M = 1780$ kgfm. Suivant les lignes discontinues on a dessiné les diagrammes des contraintes calculées théoriquement en admettant $n = 15$ pour la phase *II* de chargement de la poutre et avec $n = 6{,}45$ pour la phase *I*. Pour les petits moments fléchissants on voit (fig. 3-6b) que le diagramme théorique de la contrainte τ pour $n = 6{,}45$ concorde assez bien avec celui qui a été calculé; par contre pour les moments

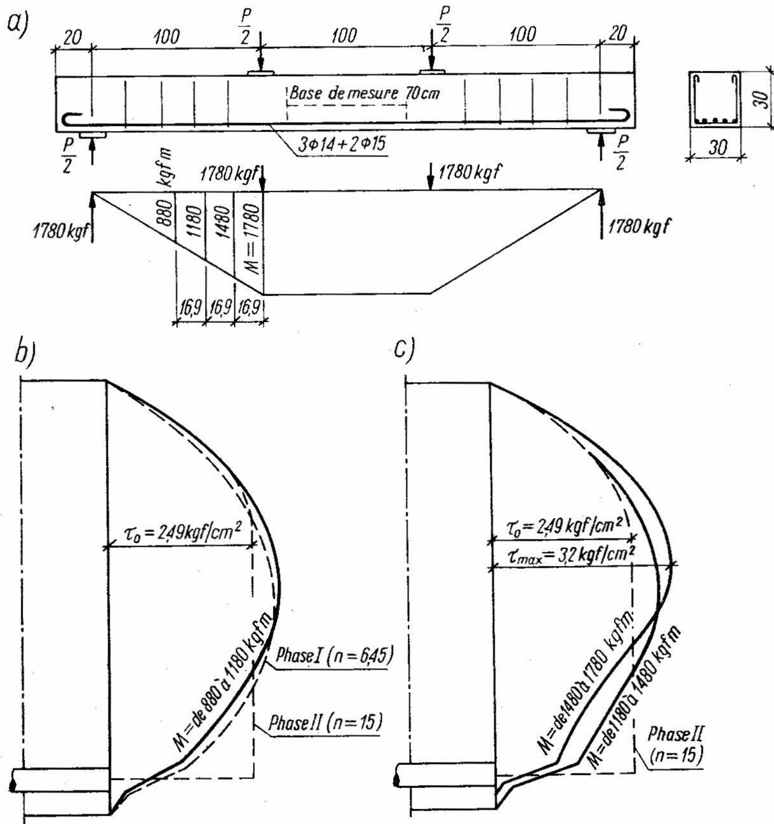


Fig. 3-6. Diagramme effectif et théorique des contraintes de cisaillement dans une section rectangulaire d'une poutre en béton armé après les essais de MÖRSCH, [63] : a) disposition de la poutre et diagramme des moments fléchissants, b) c) diagrammes des contraintes de cisaillement pour les valeurs inférieures et supérieures des moments fléchissants

plus élevés (fig. 3-6c) la contrainte τ_{max} est largement supérieure à la contrainte τ_0 calculée dans la phase *II*.

Le même problème pour une poutre de section en T est présenté par la figure 3-7 où, de plus, le diagramme des contraintes normales σ_x est donné.

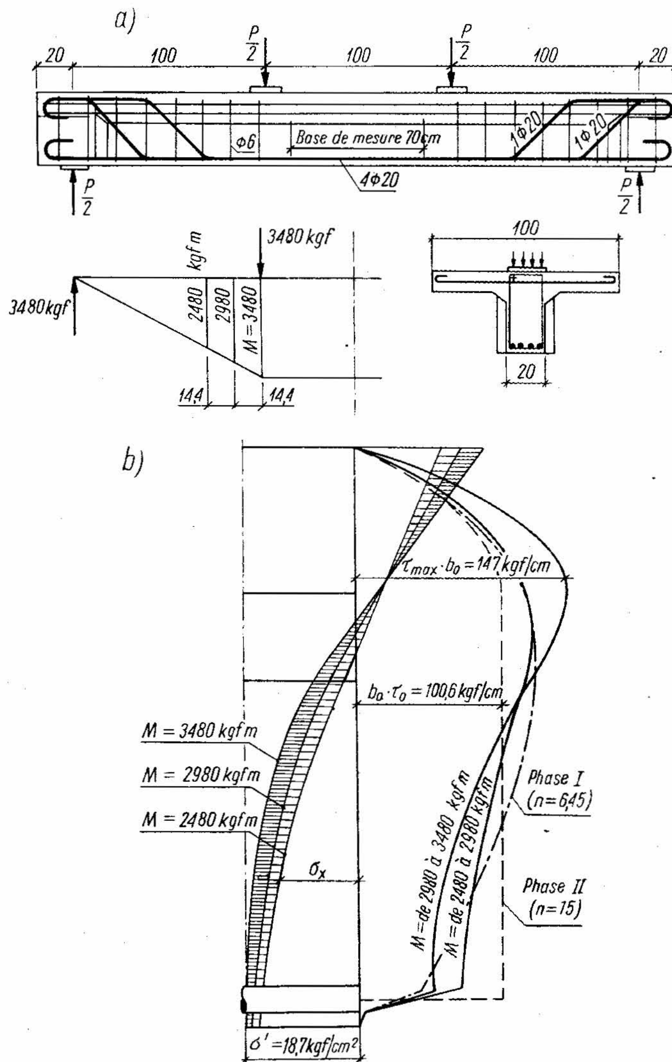


Fig. 3-7. Diagrammes effectif et théorique des contraintes de cisaillement dans une section en forme de T d'une poutre en béton armé d'après les essais de MÖRSCH, [63] : a) disposition de la poutre et diagramme des moments fléchissants, b) diagrammes des contraintes tangentes (de cisaillement) et normales dans les différentes sections

3.3. CALCUL DE L'EFFORT OBLIQUE DE TRACTION

Dans nos considérations nous admettons comme un principe de base que les efforts de traction dans le béton sont transmis par les barres en acier. Découpons maintenant la poutre en béton armé, à la hauteur de l'axe où les contraintes σ_x s'annulent, par une section fictive telle que dans cette section on n'ait que des contraintes principales de compression et de traction. Dans la zone où les contraintes σ_x sont égales à zéro, c'est la section en forme de dents de scie (fig. 3-8) qui satisfait à cette condition, ses plans obliques étant inclinés à 45° et à 135° par rapport à l'axe de la poutre.

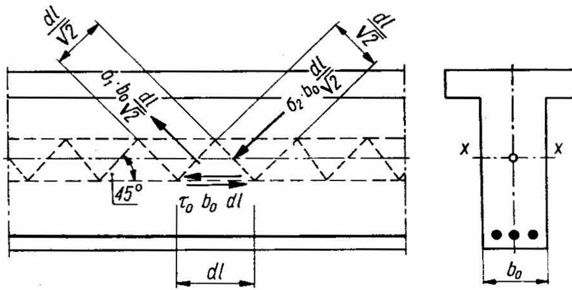


Fig. 3-8. Efforts appliqués à un élément d'une poutre, correspondant aux contraintes principales et tangentes dans l'axe des contraintes σ_x nulles.

Les contraintes principales perpendiculaires aux plans obliques de cette section sont égales à $\tau_0 (\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_0)$. Un élément de la poutre est donc chargé par les efforts suivants :

$$\sigma_1 b_0 \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{2}} = \tau_0 b_0 \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{2}} = \frac{T}{z} \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{2}}, \tag{3.13}$$

$$\sigma_2 b_0 \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{2}} = -\tau_0 b_0 \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{2}} = -\frac{T}{z} \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{2}}. \tag{3.14}$$

Dans la section parallèle à l'axe de la poutre apparaissent la contrainte de cisaillement τ_0 et l'effort de glissement longitudinal correspondant

$$\tau_0 b_0 \mathrm{d}l = \frac{T}{z} \mathrm{d}l. \tag{3.15}$$

Les expériences montrent que c'est l'effort de traction produit par les contraintes σ_1 qui est toujours la cause de la rupture dans les liens structuraux du béton ; par contre, l'effort de glissement longitudinal et l'effort tranchant ne provoquent que très rarement l'épuisement de la capacité portante. Ceci peut arriver exclusivement dans une poutre en T avec la nervure très mince; dans ce cas il faut également analyser l'influence des deux autres efforts, résultant des contraintes σ_2 et τ_0.

Conformément aux recommandations de MÖRSCH, tout l'effort de traction indiqué par l'équation (3.13) doit être transmis aux barres de l'armature, tandis que le béton est destiné à supporter les efforts de compression.

Dans la phase *II* de chargement du béton, les éléments séparés par des fissures inclinées peuvent être considérés comme des bielles comprimées, et les étriers ou les barres relevées comme des bielles ou croisillons tendus. Ainsi, toute la zone de cisaillement de la poutre en béton armé dans la phase *II* est regardée par MÖRSCH comme un treillis. Cette formulation du problème de cisaillement est connue dans la littérature comme l'analogie du treillis de MÖRSCH.

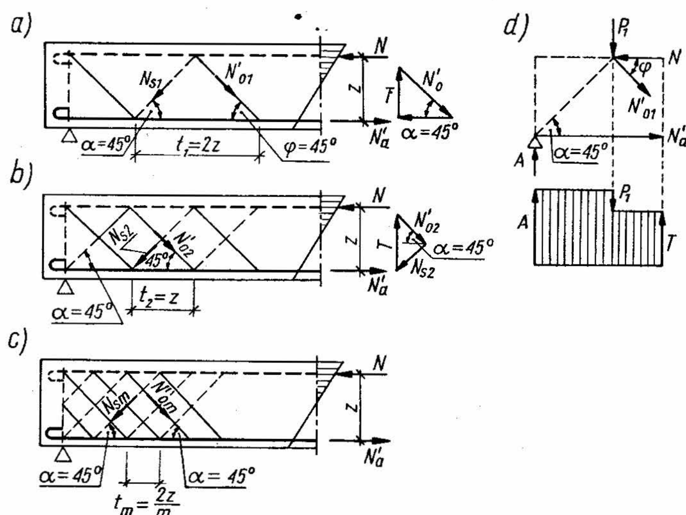


Fig. 3-9. Schémas des treillis classiques de MÖRSCH pour les poutres munies de barres relevées : a) treillis dont la distance entre les barres tendues est égale à $t_1 = 2z$, b) treillis avec deux systèmes de barres croisées, où $t_2 = z$, c) treillis avec m systèmes de barres croisées, $t_m = zm$, d) partie du treillis voisine de l'appui, séparée par une section de RITTER, et diagramme des efforts tranchants.

La figure 3-9 représente quelques variantes du treillis fictif de MÖRSCH dans le cas des barres relevées à 45°. Les axes des bielles comprimées en béton sont indiqués par les lignes discontinues. Les notations sont employées comme il suit :

N'_a — l'effort de traction dans l'armature principale (membrure inférieure du treillis),

N — l'effort de compression (membrure supérieure du treillis),

N'_0 — l'effort dans les barres relevées (croisillon tendu),

N_0 — l'effort de compression dans les bielles en béton.

Si l'on sépare par la section de RITTER la partie près de l'appui d'un treillis simple (fig. 3-9a), on obtient de la condition $\sum Y = 0$ que

$$T - N'_{01} \sin\varphi = 0,$$

d'où, en portant l'hypothèse de MÖRSCH $\alpha = \varphi = 45°$, on trouve

$$N'_{01} = \frac{T}{\sin 45°} = T\sqrt{2}. \tag{3.16}$$

Dans un treillis construit en barres une fois croisées, donc composé par deux treillis simples (fig. 3-9b), on obtient :

pour $t_2 = z$ et $\alpha = \varphi = 45°$,

$$N'_{02} = \frac{T}{2\sin 45°} = \frac{T}{\sqrt{2}};$$

pour $t_1 = 2z$, comme précédemment,

$$N'_{01} = 2\frac{T}{\sqrt{2}} = T\sqrt{2}.$$

Dans un treillis construit en barres m-fois croisées (triangulation multiple) (fig. 3-9c), pour $t_m = \dfrac{2z}{m}$ il vient

$$N'_{0m} = \frac{T}{m\sin 45°} = \frac{T}{m}\sqrt{2}.$$

Pour comparer, nous calculons l'effort oblique de traction dans le segment $t_1 = 2z$, où on a m barres relevées, et nous trouvons

$$N'_{01} = mN'_{0m} = m\frac{T\sqrt{2}}{m} = T\sqrt{2}.$$

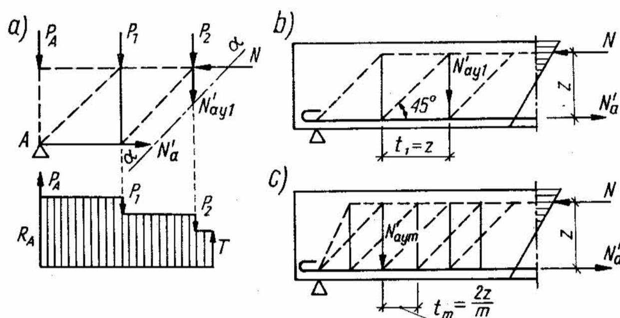


Fig. 3-10. Schémas des treillis classiques de MÖRSCH pour les poutres munies d'étriers verticaux : a) treillis classique séparé par une section de RITTER et diagramme des efforts tranchants, b) treillis simple, c) m treillis simples

De cette expression de la traction il découle que la valeur de la traction et également la section transversale des barres relevées ne dépendent pas de la densité des bielles. Cette constatation n'est valable qu'en admettant l'hypothèse de MÖRSCH que m treillis simples supposés dans une poutre en béton armé sont entièrement indépendants.

De même, dans la zone de cisaillement armée seulement par les étriers, la valeur de l'effort N'_{ay} correspondant à l'unité de longueur de la poutre ne dépend pas du nombre des barres comprimées croisées avec des barres tendues (fig. 3-10).

Pour l'espacement des étriers égal à $t_1 = z$ nous obtenons d'après le schéma a)

$$N'_{ay1} = T.$$

Si l'on a m étriers dans un segment 2 z, l'effort dans un étrier est égal à

$$N'_{aym} = \frac{2T}{m}.$$

Les considérations ci-dessus permettent de conclure que l'analogie du treillis de MÖRSCH est basée sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

a) le treillis est isostatique,
b) l'inclinaison des éléments comprimés (bielles en béton) est égale à 45°,
c) les membrures comprimée et tendue sont parallèles, cela signifie que dans une section verticale l'effort de compression est parallèle à l'effort de tension ($N_b || N'_a$),
d) les bielles séparées par les fissures sont soumises à la compression axiale.

3.4. ARMATURE PAR ÉTRIERS

Dans le cas d'une poutre non armée transversalement, après l'apparition d'une fissure inclinée suivant la hauteur de la poutre, les composantes verticales des efforts N'_a et N_b doivent équilibrer l'effort tranchant T (fig. 3-11). L'effort N'_a incliné, dont la direction est différente de celle de l'axe de la barre, provoque l'apparition d'une fissure horizontale parallèle à l'axe de la barre (fig. 3-12); ceci produit en conséquence une charge supplémentaire de la zone de l'ancrage et de la zone comprimée. La surcharge de la zone comprimée apparaît notamment dans la section au-dessus de la fissure inclinée.

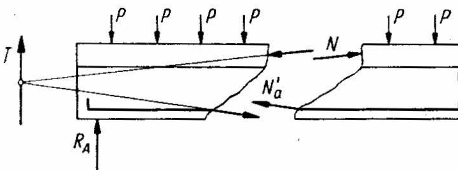


Fig. 3-11. Directions des résultantes N et N'_a avant la formation d'une fissure horizontale dans le cas où la poutre est sans armature transversale

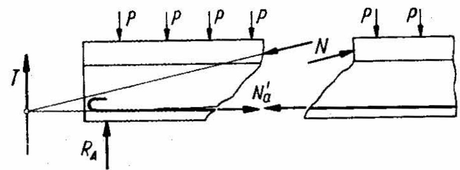


Fig. 3-12. Directions des résultantes N et N'_a après la formation d'une fissure horizontale au niveau de l'armature principale

Pour prévenir ce phénomène, qui est nuisible d'après MÖRSCH, la section transversale des étriers traversés par la fissure oblique doit être calculée d'après la condition

$$\sum A'_v \bar{\sigma}_z = T.$$

L'armature transversale ainsi déterminée permet de maintenir les membrures inférieure et supérieure parallèles dans le treillis fictif ($N_b||N'_a$), conformément au polygone des forces donné par la figure 3-13.

Si l'on admet la fissure inclinée à 45°, on peut supposer que la projection de cette fissure sur l'axe horizontal est approximativement égale au bras de levier z. Dans cette hypothèse et prenant l'espacement des étriers égal à t (fig. 3-14), nous obtenons z/t comme le nombre des étriers traversés par la fissure oblique. Si N'_{ay1} désigne l'effort de traction transmis par un étrier chargé jusqu'aux contraintes admissibles, les recommandations ci-dessus de MÖRSCH mènent à la relation suivante :

$$T = N'_{ay1} \frac{z}{t}, \tag{3.17}$$

ou bien, si l'effort de traction dans les étriers situés dans un plan est (supposé) connu, nous pouvons calculer l'espacement des étriers

$$t = \frac{N'_{ay1}}{T} z = \frac{N'_{ay1}}{b_0 \tau_0}. \tag{3.18}$$

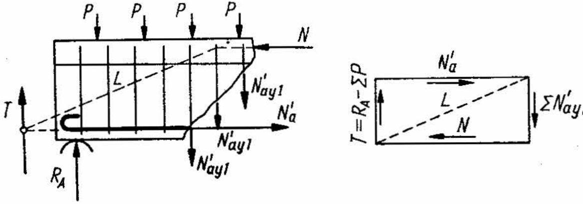


Fig. 3-13. Répartition des efforts intérieurs appliqués à un élément de la poutre en béton armé, munie d'étriers verticaux [63], élément voisin de l'appui et séparé par une fissure oblique

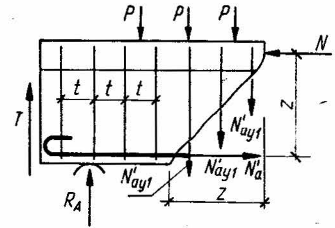


Fig. 3-14. Répartition idéale des efforts intérieurs dans la zone de cisaillement après la formation d'une fissure oblique dans une poutre munie d'étriers verticaux [63]

Souvent les étriers sont employés simultanément avec des barres relevées. On établit alors la section transversale et l'espacement des étriers et ceci permet de déterminer a priori la partie de l'effort tranchant transmise par les étriers (formule 3.17), ou bien la partie des contraintes de cisaillement transmise par ces étriers. Pour déterminer ces contraintes on peut utiliser la formule suivante

$$\tau_v = \frac{N'_{ay1}}{b_0 t} = \frac{A'_v Q_{ae}}{b_0 ts}, \tag{3.19}$$

où s désigne le coefficient de sécurité.

3.5. ARMATURE EN FORME DE BARRES RELEVÉES

De l'analogie du treillis de Mörsch discutée au sous-chapitre 3.3 il s'ensuit que le nombre des barres relevées peut être déterminé d'après la valeur des efforts de traction dans les bielles d'un treillis fictif. Les efforts dans les barres relevées peuvent être calculés également soit à partir du diagramme des contraintes de cisaillement, soit à partir du diagramme des contraintes obliques de traction.

Les efforts calculés ainsi sont indépendants de la méthode de calcul; ceci résulte par exemple de la figure 3-15 où la poutre simplement appuyée et uniformément chargée est

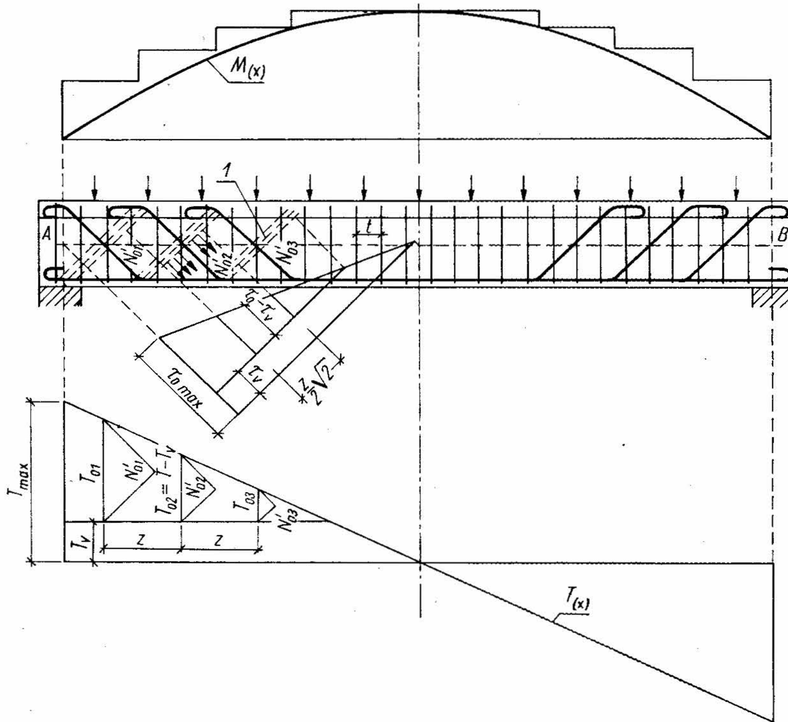


Fig. 3-15. Application des diagrammes des efforts tranchants T et des contraintes de cisaillement τ au dimensionnement de l'armature transversale [63]
1 — bielles comprimées en béton

examinée. Les étriers disposés sur toute la longueur de la poutre sont chargés par la partie suivante de l'effort tranchant

$$T_v = N'_{ay1} \frac{z}{t}.$$

Si l'aire relative de la section des étriers $\overline{\omega}_v$ est constante le long de la poutre, nous découpons dans le diagramme des efforts tranchants $T(x)$ une bande correspondant à

l'ordonnée T_v. Par contre, si nous utilisons les contraintes τ, une bande pareille correspondant à l'ordonnée

$$\tau_v = \frac{N'_{ay1}}{b_0 t}$$

est découpée dans le diagramme des contraintes de cisaillement (fig. 3-15). En désignant l'effort tranchant correspondant aux barres relevées par T_0, où $T_0 = T - T_v$, et en employant le schéma de deux treillis simples, nous trouvons d'après la figure 3-15

$$N'_{02} = \frac{T_{02}}{\sqrt{2}} = \frac{T_{02}}{2}\sqrt{2}, \tag{3.20}$$

mais pour les barres relevées plus près l'une de l'autre, par exemple pour un schéma de m treillis simples (triangulation multiple), nous aurons

$$N_{0m} = \frac{T_0}{m}\sqrt{2}. \tag{3.21}$$

En utilisant le diagramme des contraintes de cisaillement nous avons, pour le schéma de deux treillis simples,

$$N_{02} = b_0(\tau_0 - \tau_v)\frac{z}{2}\sqrt{2}, \tag{3.22}$$

ou bien, pour le schéma de m treillis,

$$N_{0m} = b_0(\tau_0 - \tau_v)\frac{z}{m}\sqrt{2}. \tag{3.23}$$

Si l'on tient compte que $b_0(\tau_0 - \tau_v)z = T_0$, on voit que les efforts obliques dans une barre relevée calculés d'après l'analogie du treillis par la formule (3.21) et d'après le diagramme des contraintes de cisaillement par la formule (3.23) sont identiques.

4. PROBLÈME DU CISAILLEMENT DANS QUELQUES THÉORIES D'ÉTATS LIMITES ULTIMES

Ce qui provoque depuis bien longtemps des objections de la part des théoriciens du béton armé et qui est un sujet de discussions et de débats perpétuels, c'est le dimensionnement par la méthode d'état limite ultime des éléments en béton armé soumis à la flexion, tout en conservant la méthode classique de dimensionnement pour le cisaillement et en considérant d'une façon indépendante l'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

Presque tous les chercheurs sont d'accord sur la dépendance du portant d'une section vis-à-vis de l'influence simultanée du moment fléchissant et de l'effort tranchant et sur l'impossibilité d'analyser ces influences séparément, surtout si l'on utilise deux méthodes différentes dont l'une étudie l'état de rupture, et l'autre l'état d'exploitation. C'est une attitude évidemment inconséquente, mais d'autre part l'état d'exploitation est pour nous aussi intéressant que l'état de rupture. Il faut connaître le premier pour éviter la destruction graduelle de la construction pendant une exploitation de longue durée, le second état doit être également examiné pour pouvoir déterminer le coefficient de sécurité.

Par conséquent, la nécessité se manifeste de connaître les méthodes basées sur l'état limite ultime. Par ces méthodes il sera possible de définir d'une manière plus ou moins précise les paramètres limites de la résistance qui déterminent la rupture d'un élément.

4.1. MÉTHODE DE BORICHANSKI

Les essais des poutres en béton armé soumises au cisaillement, réalisés par M. S. BORICHANSKI, ont été commencés en 1937 sous la direction du Professeur A. A. GVOZDIEV. L'analyse des résultats de ces essais et les recommandations pour le dimensionnement d'après l'état limite ultime ont été inclus dans l'ouvrage [11] publié en 1946. Les conclusions et les résultats les plus importants qu'on ait tirés de ces essais ainsi que les propositions pour le dimensionnement contenues dans cet ouvrage sont présentés ci-dessous. Les recommandations pour le dimensionnement d'après BORICHANSKI ont été formulées dans le règlement soviétique NiTU 123–55 et également, avec quelques changements, dans le projet du règlement SNiP II-B. 1–62.

En préparant le programme de ses essais, BORICHANSKI a admis qu'une partie de l'effort tranchant peut être supportée par la zone comprimée du béton et c'est pourquoi

il était possible de réduire considérablement l'armature transversale. De plus, il a admis que le rapport entre les valeurs de l'effort normal et de l'effort transversal exerce une influence essentielle sur la résistance de la zone comprimée du béton au-dessus de la fissure oblique.

Pour étudier ce problème, BORICHANSKI a fait des essais sur des poutres en béton, chacune avec une fissure oblique artificielle préalablement créée. L'effort horizontal qui remplaçait l'influence de l'armature longitudinale a été réalisé au moyen d'un vérin hydraulique, situé entre la poutre et le cadre en acier, spécialement construit pour ces essais (fig. 4-1).

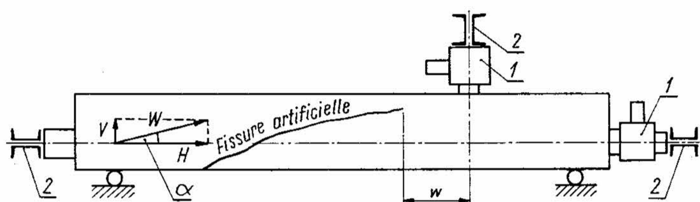


Fig. 4-1. Exemple d'une poutre en béton avec une fissure artificielle dans les essais de BORICHANSKI [11]
1 — vérin hydraulique, 2 — dispositif d'essai sous la forme d'un cadre en acier

Les poutres expérimentales ont été soumises aux essais avec différents rapports entre les forces V et H, de sorte que l'angle α entre la résultante W et l'axe de la poutre variait de 5° à 75°. Les essais ont été effectués sur 44 éléments. Dans la plupart des cas la résultante W passait par un point situé au-dessus de l'extrémité de la fissure artificielle, à 4 cm environ du bord comprimé. On a constaté que la rupture de toutes les poutres a eu lieu dans le plan qui contenait la droite joignant l'extrémité de la fissure artificielle et le point d'application de la force verticale. Cette forme de rupture a été constatée également dans les cas où la distance w entre l'extrémité de la fissure et le point d'application de la charge concentrée sur le bord supérieur de la poutre était importante.

Pour un rapport des efforts H/V constant, la valeur de la charge de rupture dépend de l'angle d'inclinaison de la fissure artificielle oblique. Ainsi, par exemple, il s'avérait que la charge de rupture d'une poutre avec fissure artificielle peu inclinée était approximativement trois fois plus petite que celle d'une poutre avec fissure très inclinée, le rapport H/V étant le même pour les deux poutres. L'influence de l'inclinaison de la fissure sur la capacité portante a été étudiée également dans les poutres en béton armé. Les essais fondamentaux ont été effectués en 4 séries de poutres.

La première série était composée de 10 groupes de 3 poutres. Les poutres de section transversale $bh_t = 20 \times 30$ cm ont été armées de 5 barres de Ø 20 mm ($\overline{\omega} = 2{,}65$ %). Ces poutres différaient par la longueur du segment sans armature transversale où les fissures inclinées pouvaient apparaître librement en fonction des différents rapports M/T.

La deuxième série de poutres était destinée à l'étude de l'influence des dimensions. Cette série était composée de 4 groupes de poutres dont les hauteurs étaient 10, 20, 45 et 60 cm.

La troisième série de poutres a été préparée pour l'examen de l'influence de la section de l'armature. Les poutres, de section transversale 20×30 cm, ont été munies d'une armature longitudinale de pourcentage différent ($\bar{\omega} = 4,1$ % ; $\bar{\omega} = 2,6$ %; $\bar{\omega} = 1,5$ %).

Les essais de la quatrième série ont eu pour but de déterminer dans quelle mesure le talon des poutres en forme de T peut être pris en compte dans le calcul de la résistance contre les efforts tranchants. Cette série se composait de 6 poutres dont la hauteur utile était de $h = 30$ cm, la largeur de la nervure, de 20 cm et celle du hourdis comprimé, de 50 cm.

D'après les essais de la première série, Borichanski a constaté que dans la plupart des poutres la rupture a été provoquée par le glissement de la zone comprimée au-dessus de l'extrémité de la fissure oblique, bien que les autres poutres aient subi l'écrasement de la zone comprimée par suite de l'écoulement de l'armature principale.

Dans l'opinion de Borichanski, l'inclinaison de la fissure oblique a une influence prépondérante sur la valeur de l'effort transversal V_b supporté par la zone comprimée du béton. Le diagramme de la figure 4-2 montre la relation entre $\frac{V_b}{bh\bar{\sigma}_b}$ et cot α, qui représente le rapport entre les projections horizontale et verticale de la fissure. Pour déterminer l'angle α, on a considéré la distance entre l'armature longitudinale et le bord comprimé de la poutre. Dans le cas des armatures situées à deux niveaux, cette distance était mesurée entre les barres tendues et comprimées.

La figure 4-2 contient également la courbe correspondant à la relation

$$\frac{V_b \cot\alpha}{bh\bar{\sigma}_b} = 0,185.$$

Pour cette courbe, la somme algébrique des écarts des résultats expérimentaux est égale à zéro et l'écart quadratique moyen est égal à 25 %.

Les résultats des essais de la deuxième série indiquent que la diminution de la hauteur d'une poutre, jusqu'à 20 cm, se traduit par une augmentation de la résistance suppléant au cisaillement de la zone comprimée du béton $\frac{V_b}{bh\bar{\sigma}_b}$; mais pour les poutres de hauteurs supérieures à 30 cm cette résistance se trouve stabilisée.

Les résultats des essais de la troisième et quatrième séries ont amené Borichanski à la conclusion que la résistance suppléant au cisaillement de la zone comprimée du béton diminue avec l'augmentation de la qualité du béton; par contre, l'aire de la section transversale de l'armature longitudinale ainsi que la largeur du hourdis et le rapport M/T restent presque sans influence.

Par conséquent, Borichanski a proposé pour simplifier le problème de ne considérer que la relation entre V_b et l'angle d'inclinaison de la fissure oblique suivant la formule

$$V_b = \frac{kbh^2\bar{\sigma}_b}{e},$$

où e désigne la projection de la fissure oblique sur l'axe de la poutre.

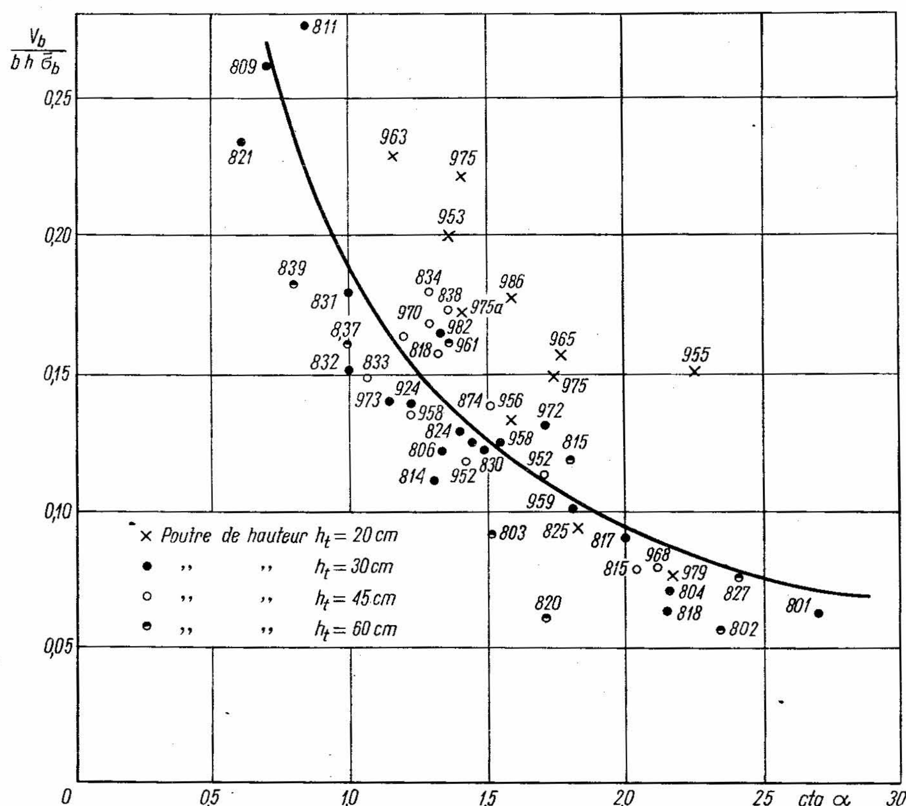


Fig. 4-2. Résultats des essais des poutres en béton armé d'après BORICHANSKI [11]

Pour toute sécurité, BORICHANSKI suggère de remplacer la valeur moyenne constante $k = 0{,}185$ par la valeur $k_{min} = 0{,}15$. Ainsi, la valeur de l'effort transversal supporté par la zone comprimée du béton est égale finalement à

$$V_b = \frac{0{,}15 b h^2 \bar{\sigma}_b}{e}. \tag{4.1}$$

Dans la théorie d'état limite ultime basée sur les essais de BORICHANSKI, on a supposé que la rupture de la zone de cisaillement dans une poutre en béton armé peut être amenée par deux causes :

1. Les contraintes dans l'armature principale atteignant la limite d'écoulement de l'acier, ou bien un glissement dû à l'ancrage insuffisant des barres, provoquent une rotation des deux parties de la poutre séparées par la fissure oblique autour d'un point commun situé dans la zone comprimée de la poutre. L'augmentation ultérieure de l'ouverture de cette fissure amène les contraintes dans l'armature transversale à la limite d'écoulement, cela dans les étriers ou dans les barres relevées.

L'écoulement de l'acier ou le glissement des barres dans leur ancrage conduit à la diminution excessive de la section de la zone comprimée et ceci est une cause directe de l'écrasement du béton au-dessus de la fissure oblique. Cela se produit d'une manière analogue à ce qui a lieu dans le cas du moment fléchissant maximal au-dessus de la fissure verticale.

2. Si l'armature principale reste ancrée au béton et les contraintes dans l'armature n'atteignent pas la limite d'écoulement ($\sigma_z < Q_a'$), il n'y a pas de rotation des deux parties de la poutre et la zone comprimée soumise simultanément au moment fléchissant et à l'effort tranchant subit la rupture par glissement.

Le schéma de disposition des efforts dans la section suivant la fissure oblique en état de rupture est présenté sur la figure 4-3. D'après BORICHANSKI la rupture n'a pas lieu si deux conditions limites de la résistance sont remplies :

a) le moment des forces extérieures par rapport au centre de gravité de la zone comprimée dans la section au-dessus de la fissure oblique ne sera pas supérieur au moment des valeurs limites des efforts internes par rapport au même point

$$M \leqslant Q_a'\left(A_a' z + \sum A_{a01}' z_0 + A_v' z_y\right), \tag{4.2}$$

b) l'effort extérieur transversal T ne sera pas supérieur à la somme des projections des valeurs limites des efforts internes sur la droite perpendiculaire à l'axe de la poutre :

$$T \leqslant Q_a'\left(\sum A_{a01}' \sin\theta + \sum A_v'\right) + V_b. \tag{4.3}$$

Ici V_b désigne la partie de l'effort tranchant supportée par la zone comprimée du béton.

Si l'on considère, suivant l'indication de BORICHANSKI, la valeur $V_b = \dfrac{0{,}15 b h^2 \overline{\sigma}_b}{e}$ comme constante (4.1), la formule (4.3) prend la forme

$$T \leqslant Q_a'\left(\sum A_{a01}' \sin\theta + \sum A_v'\right) + \frac{0{,}15 b h^2 \overline{\sigma}_b}{e}. \tag{4.3a}$$

L'effort tranchant qui peut être transmis par les étriers verticaux situés sur l'unité de longueur de la projection horizontale de la fissure oblique est désigné par q_y. Etant

Fig. 4-3. Rupture dans une section suivant la fissure oblique, d'après BORICHANSKI [11]

Fig. 4-4. Position défavorable d'une fissure oblique dans une poutre munie d'étriers verticaux

donné que les étriers qui traversent la fissure oblique supportent l'effort $Q'_a \sum A'_v$, nous pouvons écrire

$$q_y e = Q'_a \sum A'_v \qquad \text{ou bien} \qquad q_y = \frac{A'_v}{t}.$$

Dans le cas où une poutre est armée contre le cisaillement seulement par des étriers, la formule (4.3a) prend la forme suivante

$$T = q_y e + \frac{0{,}15\bar{\sigma}_b bh^2}{e}. \tag{4.4}$$

Pour déterminer la valeur de e correspondant à l'effort tranchant minimal T supporté par les étriers et par la zone comprimée du béton, il faut égaler à zéro la dérivée première de l'équation (4.4) par rapport à e

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}e} = q_y - \frac{0{,}15\bar{\sigma}_b bh^2}{e_0^2} = 0,$$

d'où il vient

$$e_0 = \sqrt{\frac{0{,}15\bar{\sigma}_b bh^2}{q_y}}.$$

En portant e_0 dans la formule (4.4), nous trouvons

$$T = q_y e_0 + \frac{0{,}15\bar{\sigma}_b bh^2}{e_0} = \sqrt{0{,}15\bar{\sigma}_b bh^2 q_y} + \sqrt{0{,}15\bar{\sigma}_b bh^2 q_y} = \sqrt{0{,}6\bar{\sigma}_b bh^2 q_y}\,. \tag{4.5}$$

Il en résulte que dans le cas d'une poutre armée par des étriers la rupture ne se produira pas si la condition suivante est satisfaite :

$$T < \sqrt{0{,}6\bar{\sigma}_b bh^2 q_y}\,, \qquad \text{avec} \qquad q_y = \frac{A'_v \cdot Q'_a}{t}.$$

Etant donné qu'un étrier situé à l'une ou à l'autre extrémité de la fissure oblique peut ne pas la traverser (fig. 4-4), certains chercheurs soviétiques [10] préconisent de remplacer pour le dimensionnement la formule (4.5) par l'expression suivante :

$$T = \sqrt{0{,}6bh^2\bar{\sigma}_b q_y} - q_y t. \tag{4.6}$$

4.2. MÉTHODE DE GYENGÖ

De même que Borichanski, pour déterminer les paramètres statiques dans l'état de rupture, *T. Gyengö* [31] utilise les conditions d'équilibre de la partie de la poutre du côté de l'appui séparée par la fissure. Dans l'analyse des résultats expérimentaux, *Gyengö* a formulé la conclusion que dans l'état de rupture on peut baser le dimensionnement sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

1. Les armatures principale et transversale atteignent la limite d'écoulement, et les directions des efforts dans les armatures sont identiques aux axes des barres.

2. Les contraintes de compression $\bar{\sigma}_{br} = \sigma_x$ dans le béton de la zone comprimée au-dessus de la fissure oblique sont réparties uniformément, et dans l'état de rupture on peut supposer que $\sigma_x = \bar{\sigma}_b$.

3. La zone comprimée, outre les contraintes $\sigma_x = \bar{\sigma}_b$, peut supporter également les contraintes de cisaillement τ, dont la répartition est uniforme.

4. Le hourdis d'une section en T supporte également l'effort tranchant.

GYENGÖ considère l'équilibre de la partie de la poutre près de l'appui limitée par la fissure oblique, tantôt avec son armature de barres relevées (fig. 4-5a) et tantôt avec l'armature des étriers verticaux (fig. 4-5b).

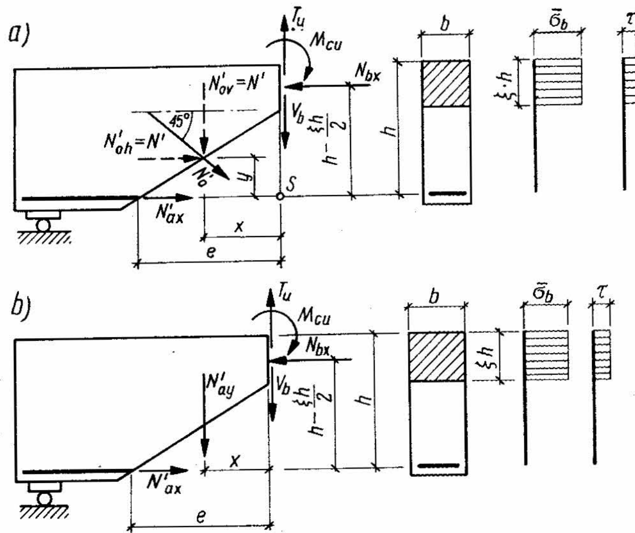


Fig. 4-5. Equilibre d'une partie de la poutre, séparée par une fissure oblique d'après GYENGÖ [31]: a) poutre munie de barres relevées, b) poutre armée par des étriers

Dans la poutre où les efforts de cisaillement sont transmis par des barres relevées, GYENGÖ se sert des conditions de l'équilibre interne, d'où il obtient :

$$M_{cu} = N_{bx}\left(h - \frac{\xi h}{2}\right) + N'_{0v}x - N'_{0h}y,$$

$$T_u = V_b N'_{0v},$$

$$N'_{ax} = N_{bx} - N'_{0h}.$$

Si les barres relevées sont inclinées à 45°, on a

$$N'_{0h} = N'_{0v} = \frac{N'_0}{\sqrt{2}} = \bar{N}'$$

et ensuite

$$M_{cu} = b\xi h\bar{\sigma}_b\left(h - \frac{\xi h}{2}\right) + \bar{N}'(x-y),$$

$$T_u = b\xi h\tau + \bar{N}'.$$

En utilisant ces dernières expressions, on peut écrire

$$M_{cu} = \frac{bh\bar{\sigma}_b(T_u - \bar{N}_1')}{bh\tau}\left[h - \frac{(T_u - \bar{N}')h}{2bh\tau}\right] + \bar{N}'(x-y).$$

Si nous substituons les symboles suivants

$$\frac{\bar{\sigma}_b}{\tau} = \varkappa \quad \text{et} \quad \chi = \frac{\varkappa}{2b\tau},$$

nous avons

$$M_{cu} = -\chi\bar{N}'^2 + [2\chi T_u - \varkappa h + (x-y)]\bar{N}' + \varkappa h T_u - \chi T_u^2,$$

ou autrement

$$\bar{N}'^2 - 2[\chi T_u - h + (x-y)]\bar{N}' - (\varkappa h T_u - \chi T_u^2 - M_{cu}) = 0;$$

d'où il vient

$$\bar{N}' = \frac{2\chi T_u - \varkappa h + (x-y) + \sqrt{[2\chi T_u - \varkappa h + (x-y)]^2 + 4\chi(\varkappa h T_u - \chi T_u^2 - M_{cu})}}{2\chi}.$$

En utilisant la relation

$$\bar{N}_1' = \frac{N_0'}{\sqrt{2}},$$

nous trouvons la valeur de l'effort incliné pour le dimensionnement des barres relevées d'après la formule

$$N_0' = \frac{2\chi T_u - \varkappa h + (x-y) + \sqrt{\varkappa^2 h^2 - 4\chi M_{cu} + 4\chi T_u(x-y) - 2\varkappa h(x-y) + (x-y)^2}}{1{,}41\chi}. \tag{4.7}$$

Si l'inclinaison de la fissure oblique par rapport à l'axe de la poutre est égale à 45° et si les barres relevées sont perpendiculaires à la fissure, nous pouvons supposer que

$$x = y = \frac{h_t}{2}.$$

Ceci permet de transformer la formule (4.7) en l'expression suivante

$$N_0' = \frac{2\chi T_u - \varkappa h + \sqrt{\varkappa^2 h^2 - 4\chi M_{cu}}}{1{,}41\chi}. \tag{4.8}$$

Dans le cas de l'armature en forme d'étriers verticaux (fig. 4-5b), nous utilisons l'équation d'équilibre des moments par rapport au point S et nous obtenons

$$M_{cu} = b\xi h\bar{\sigma}_b\left(h - \frac{\xi h}{2}\right) + N_{ay}';$$

d'après l'équation $\sum Y = 0$, il vient

$$T_u = b\xi h\tau + N'_{ay}.$$

A partir de ces deux équations nous pouvons calculer l'effort N'_{ay}, qui doit être transmis par les étriers :

$$N'_{ay} = \frac{2\chi T_u - \varkappa h + x\sqrt{\varkappa^2 h^2 - 4\chi M_{cu} + 4\chi T_u x - 2\varkappa h x + x^2}}{2}. \tag{4.9}$$

En portant $x = \frac{h}{2}$, nous avons

$$N'_{ay} = \frac{2\chi T_u - (\varkappa - 0{,}5)h + \sqrt{(\varkappa^2 - \varkappa + 0{,}25)h^2 - 4\chi M_{cu} + 2\chi T_u h}}{2\chi}. \tag{4.9a}$$

4.3. MÉTHODE DE VISY

Z. VISY [86] admet les mêmes hypothèses que GYENGÖ avec une seule différence: il considère le cas de l'application simultanée de la résultante N'_0 des efforts dans les barres relevées et de la résultante N'_{ay} des efforts dans les étriers traversés par la fissure oblique. L'effort N'_0 est incliné à 45° et l'effort vertical N'_{ay} est coupé au point situé à $h/2$ du bord supérieur de la poutre. La projection de la fissure sur l'axe horizontal est égale à la hauteur utile h de la section (fig. 4-6). La partie de la poutre séparée par la fissure oblique est soumise à l'action du moment fléchissant M, de l'effort tranchant T et des efforts internes suivants :

$$\begin{aligned} N_{bx} &= b\xi h\bar{\sigma}_b, \\ V_b &= nN_{bx}, \\ N'_{ax} &= A'_a Q_{ax}, \\ N'_{ay} &= A'_{af} Q'_{ay}, \\ N'_0 &= A'_{a0} Q'_{a0}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

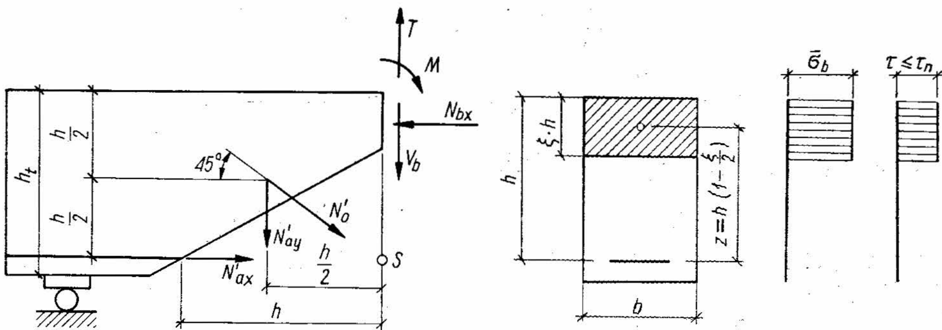


Fig. 4-6. Equilibre d'une partie de la poutre, séparée par une fissure oblique, d'après VISY [86]

Dans les formules (4.10) $n = \frac{\tau}{\bar{\sigma}_b}$; A'_{af} et A'_{a0} désignent respectivement l'aire de la section des étriers et des barres relevées, qui sont répartis le long de la distance h.

D'après les conditions $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ et $\sum M = 0$ nous trouvons :

$$\sum X = -bh\xi\bar{\sigma}_b + \frac{1}{\sqrt{2}}N'_0 + N'_{ax} = 0, \tag{4.11}$$

$$\sum Y = -T + bh\xi\tau + \frac{1}{\sqrt{2}}N'_0 + N'_{ay} = 0, \tag{4.12}$$

$$\sum M = M - bh^2\xi\bar{\sigma}_b\left(1 - \frac{\xi}{2}\right) - N'_{ay}\frac{h}{2} = 0. \tag{4.13}$$

Pour résoudre ce système d'équations avec les inconnues ξ, N'_{ay}, N'_{ax} et N'_0, VISY a introduit une condition économique à la place d'une condition géométrique supplémentaire. Il cherche donc dans la rupture un état d'équilibre pour lequel la consommation de l'acier serait minimale.

En supposant que la limite d'écoulement est identique pour tous les types d'armature employés

$$Q'_{ax} = Q'_{ay} = Q'_{a0};$$

la condition économique introduite mène à la relation

$$|N'_{ax}| + |N'_{ay}| + \sqrt{2}\,|N'_0| = \text{minimum}. \tag{4.14}$$

Nous utilisons les symboles suivants

$$m = \frac{2M}{bh^2\bar{\sigma}_b} \quad \text{et} \quad q = \frac{T}{bh\bar{\sigma}_b}, \tag{4.15}$$

(4.16)

et nous pouvons écrire l'équation (4.14) sous la forme suivante

$$\bar{N}'_{ax} = \frac{N'_{ax}}{bh\bar{\sigma}_b} = \xi^2 - (1-n_1)\xi + (m-q), \tag{4.17}$$

$$\bar{N}'_{ay} = \frac{N'_{ay}}{bh} = \xi^2 - 2\xi + m, \tag{4.18}$$

$$\bar{N}'_0 = \frac{N'_0}{bh\bar{\sigma}_b}\sqrt{2} = 2[-\xi^2 + (2-n_1)\xi - (m-q)]. \tag{4.19}$$

Par conséquent, l'équation (4.14) s'écrit

$$A(n_1, \xi) = |\bar{N}'_{ax}| + |\bar{N}'_{ay}| + |\bar{N}'_0| = \text{minimum}. \tag{4.20}$$

Les valeurs n_1 et ξ doivent être déterminées de façon que la somme des termes de l'équation (4.20) soit minimale.

Les valeurs $\bar{N}'_{ax}$, $\bar{N}'_{ay}$, $\bar{N}'_0$ dépendent de n_1 et ξ et sont proportionnelles aux efforts de traction dans l'armature.

Pour déterminer l'étendue de validité de la solution du problème ainsi formulé, VISY a admis les hypothèses suivantes:

1. L'effort N_{bx} doit être appliqué conformément à la direction indiquée par la figure 4-6, ce qui implique que ξ ne peut pas prendre des valeurs négatives. La valeur de ξ ne peut pas non plus être supérieure à 1/2, car on suppose que la hauteur de la zone comprimée dans l'état de rupture ne dépasse pas la moitié de la hauteur utile d'une section. Cette hypothèse s'écrit

$$0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}.$$

2. L'effort tranchant $V_b = \bar{\sigma}_b n \xi h b$ dans la zone comprimée du béton est appliqué suivant la direction indiquée par la figure 4-6, soit suivant la direction inverse. Sa valeur est limitée par la condition $|\tau| \leqslant |\tau_n|$. Ceci mène à l'inégalité

$$-n_0 \leqslant n \leqslant n_0 ;$$

ici $n_0 = \frac{\tau_n}{\bar{\sigma}_b} = 0{,}2$ est un rapport limite entre les contraintes de cisaillement et les contraintes de compression.

3. On exclut la possibilité de l'ouverture d'une fissure oblique sous les charges d'exploitation; donc pour les bétons de construction, l'inégalité suivante est valable

$$\tau = \frac{T}{bz} = \frac{T}{bh\left(1-\frac{\xi}{2}\right)} = \frac{q\bar{\sigma}_b}{1-\frac{\xi}{2}} \leqslant 17{,}5\ \text{kgf/cm}^2.$$

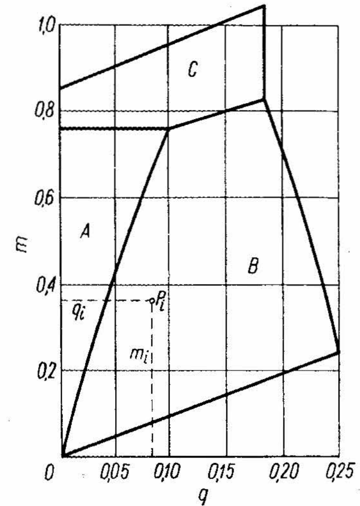


Fig. 4-7. Diagramme des zones A, B et C dans la méthode de dimensionnement de l'armature transversale d'après VISY [86]

La figure 4-7 représente les zones A, B et C déduites de la solution du problème traité, dans le plan des coordonnées orthogonales q et m.

L'armature pour un segment donné de la poutre peut être déterminée, moyennant la figure 4-7, comme il suit :

Pour une section transversale de la poutre dont les dimensions sont connues et pour les valeurs de M, T, $\bar{\sigma}_b$ et Q'_a données on calcule les valeurs m_i et q_i d'après les équations (4.15) et (4.16). Les valeurs ξ et n_1 qui correspondent au minimum de l'armature sont calculées après avoir déterminé dans quelle zone se trouve le point P_i de coordonnées m_i et q_i. Ensuite, on calcule les efforts qui déterminent l'armature.

Alors, si le point P_i se trouve dans la zone A, nous avons

$$\xi_A = 1 - \sqrt{1-m}\,, \qquad n_{1A} = \frac{q}{\xi_A}. \tag{4.21}$$

Dans ce cas, l'effort transversal est entièrement transmis par la zone comprimée de la poutre. L'effort de traction dans l'armature principale est calculé d'après la formule $N'_{ax} = \xi_A bh\bar{\sigma}_b$ et l'armature transversale est inutile.

Dans le cas du point P_i situé dans la zone B, on a

$$\xi_B = 0{,}9 - \sqrt{0{,}81-(m-q)}, \quad n_{1B} = +n_0 = 0{,}2. \tag{4.22}$$

Cette position du point P_i indique que la zone comprimée du béton est utilisée au maximum pour supporter le cisaillement, en portant seulement une partie de l'effort tranchant. L'autre partie de l'effort T doit être transmise par l'armature transversale. Des considérations de VISY il résulte que les étriers perpendiculaires à l'axe de la poutre sont l'armature la plus économique. L'armature longitudinale et les étriers doivent être dimensionnés en tenant compte des efforts suivants

$$N'_{ax} = \xi_B bh\bar{\sigma}_b, \tag{4.23}$$

$$N'_{ay} = (q-0{,}2\xi_B)bh\bar{\sigma}_b. \tag{4.24}$$

Quand le point P_i se trouve dans la zone C, on a

$$\xi_C = 0{,}5\ ; \quad n_{1C} = 1{,}5-(m-q). \tag{4.25}$$

Les efforts N'_{ax} et N'_{ay} peuvent être calculés d'après les formules :

$$N'_{ax} = 0{,}5bh\bar{\sigma}_b, \tag{4.26}$$

$$N'_{ay} = (m-0{,}75)bh\bar{\sigma}_b. \tag{4.27}$$

Le point P_i déterminé par ses coordonnées q_i et m_i situé en dehors des zones A, B, C (fig. 4-7) indique qu'il faut changer la qualité du béton dans le cas considéré ou bien trouver d'autres dimensions de la section.

4.4. MÉTHODE DE BAY

Comme BORICHANSKI, GYENGÖ et VISY, BAY dans les ouvrages [6] et [7] admet qu'une partie de l'effort tranchant est transmise par le béton dans la zone comprimée de la poutre. Contrairement à GYENGÖ, BAY ne suppose pas l'existence d'une proportionnalité entre V_b et N_{bx}, mais il admet que la mesure de la sollicitation, donc également de la rupture de la zone comprimée, est la résultante des contraintes de compression dues au moment fléchissant et des contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant.

Etant donné que dans une poutre simplement appuyée et uniformément chargée la distance entre la section considérée et l'appui $x = al$ est liée par une relation quadratique avec N_{bx}, et par une relation linéaire avec l'effort tranchant T, conformément aux hypothèses admises, l'endroit le plus menacé par l'action simultanée du moment et de l'effort tranchant est situé dans l'intervalle $0 < x < l/2$ dans le cas où l'armature est constituée seulement de barres longitudinales dans la zone tendue.

La théorie classique du cisaillement suppose que la résultante des contraintes de compression dans le béton N_b est parallèle au bord supérieur de la poutre (fig. 4-8) et l'effort tranchant est entièrement transmis aux étriers et aux barres relevées qui traversent la fissure oblique.

D'après BAY il existe cependant une possibilité qu'en vertu de la résistance considérable du béton dans la zone comprimée, outre l'effort N_{bx} appliqué à la section verticale de

cette zone, on peut avoir également l'effort V_b perpendiculaire au bord comprimé (fig. 4-9). La valeur de l'effort V_b dépend du rapport entre N_{bx} et $N_{bx\,max}$: à mesure que N_{bx} approche de la valeur limite de $N_{bx\,max}$, la valeur de V_b diminue, et inversement. L'influence du rapport N_{bx}/V_b sur la sollicitation de la zone comprimée n'est pas connue d'une façon précise car l'état de contrainte dans le voisinage du bord comprimé est très compliqué. Pour simplifier le problème, BAY suppose que la résultante des contraintes σ_x est située suivant le bord

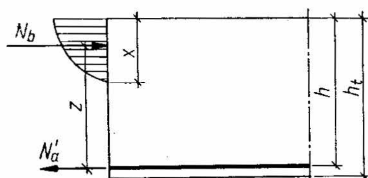


Fig. 4-8. Efforts et contraintes dans la section transversale d'une poutre fléchie en béton armé, d'après BAY

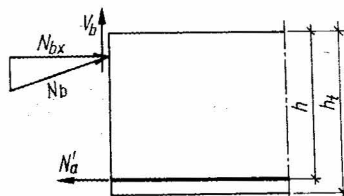


Fig. 4-9. Disposition des efforts dans une section verticale, dans la zone de cisaillement d'une poutre en béton armé, d'après BAY

comprimé de la poutre et qu'elle produit les contraintes de traction σ_y dans la section perpendiculaire à ce bord. La valeur de ces contraintes peut être calculée d'après les formules données ci-dessous qui ont été déduites pour un quadrant d'un plan élastique chargé à l'angle par la force concentrée N_{bx} (fig. 4-10) ou bien par la force V_b (fig. 4-11). En utilisant

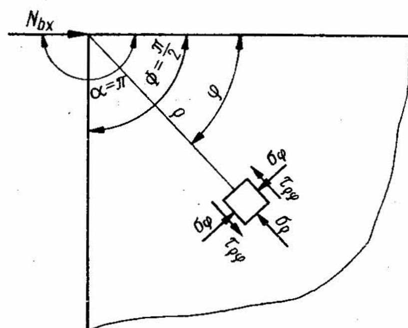


Fig. 4-10. Quadrant d'un plan élastique chargé à l'angle par la force concentrée horizontale N_{bx}

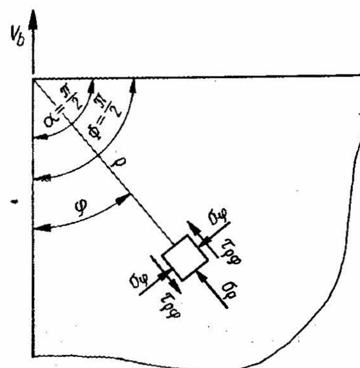


Fig. 4-11. Quadrant d'un plan élastique chargé à l'angle par la force concentrée verticale V_b

les notations données par la figure 4-10, la fonction des contraintes, dans le système des coordonnées pour l'état dit radial de contrainte, prend la forme suivante

$$F = \varrho\varphi \cdot A \sin\varphi + B \cos\varphi; \tag{4.28}$$

ici

$$A = N_{bx}\frac{\sin\alpha\sin^2\Phi - \cos\alpha\,(\Phi - \sin\Phi\cos\Phi)}{\Phi^2 - \sin^2\Phi}, \tag{4.29}$$

$$B = N_{bx}\frac{\sin\alpha(\Phi + \sin\Phi\cos\Phi) - \cos\alpha\sin^2\Phi}{\Phi^2 - \sin^2\Phi}. \tag{4.30}$$

Les composantes des contraintes s'écrivent

$$\sigma_\varrho = \frac{2}{\varrho}(A\cos\varphi - B\sin\varphi); \qquad \sigma_\varphi = \tau_{\varrho\varphi} = 0. \tag{4.31}$$

Pour $\alpha = \pi$ et $\Phi = \frac{\pi}{2}$ (fig. 4-10), nous trouvons

$$A = N_{bx}\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4} - 1}, \qquad B = N_{bx}\frac{1}{\frac{\pi^2}{4} - 1};$$

et ensuite on a

$$\sigma_\varrho = \frac{2N_{bx}}{\varrho}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cos\varphi - \sin\varphi}{\frac{\pi^2}{4} - 1}. \tag{4.32}$$

Par conséquent, les contraintes de traction perpendiculaires au bord comprimé $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ à la distance ϱ sont

$$\sigma_\varrho = \frac{2N_{bx}}{\varrho}\cdot\frac{1}{\frac{\pi^2}{4} - 1}. \tag{4.33}$$

Par analogie, dans le cas de l'effort V_b (fig. 4-11) les contraintes σ_ϱ pour $\varphi = 0$ s'écrivent

$$\sigma_\varrho = \frac{2V_b}{\varrho}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4} - 1}. \tag{4.34}$$

Si l'effort N_{bx} est appliqué seul, comme dans un cas de flexion pure, alors on a $N_{b\,max}$ sous la charge de rupture, et la contrainte de traction produite à la distance ϱ est donnée par l'expression suivante

$$\sigma_\varrho = \frac{2N_{bx\,max}}{\varrho}\cdot\frac{1}{\frac{\pi^2}{4} - 1}. \tag{4.35}$$

Dans le cas d'application simultanée de $N_{bx} < N_{bx\,max}$ et V_b, la contrainte de traction σ_ϱ dans une section perpendiculaire au bord ne peut pas dépasser la valeur déterminée par l'équation (4.35). Ainsi nous obtenons l'équation

$$\frac{2N_{bx\,max}}{\varrho}\cdot\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}-1}=\frac{2N_{bx}}{\varrho}\cdot\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}-1}+\frac{2V_b}{\varrho}\,\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}-1}. \tag{4.36}$$

De l'équation (4.36) on peut calculer

$$V_b=KT=\frac{N_{bx\,max}-N_{bx}}{\frac{\pi}{2}}, \tag{4.37}$$

ou bien

$$K=\frac{N_{bx\,max}}{T_{max}}\;\frac{1-\dfrac{N_{bx}}{N_{bx\,max}}}{\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{T}{T_{max}}}. \tag{4.38}$$

En employant cette méthode pour une poutre simplement appuyée et uniformément chargée, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned}
N_{bx\,max}&=\frac{ql^2}{8}\,\frac{1}{z};\\
N_{bx}&=\frac{qx(l-x)}{2}\,\frac{1}{z};\\
T_{(x)}&=q\left(\frac{l}{2}-x\right); \qquad T_{max}=\frac{ql}{z}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

La formule (4.38) nous permet d'écrire

$$K=\frac{N_{bx\,max}}{T_{max}}\;\frac{1-\dfrac{4x(l-x)}{l^2}}{\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{(l/2-x)}{l/2}}. \tag{4.40}$$

En posant $\frac{x}{l}=a$ et en utilisant la relation (4.39), la formule (4.38) prend la forme

$$K=\frac{l}{2\pi z}\,\frac{1-4a(1-a)}{(1-2a)}=\frac{l}{2\pi z}(1-2a). \tag{4.41}$$

D'après l'opinion de Bay le hourdis dans une poutre en forme de T ne participe pas à la transmission de l'effort tranchant, et c'est pourquoi il introduit un coefficient de réduction pour ces poutres $\beta=\frac{b_0}{b_1}$ (b_0, largeur de la nervure ; b_1, largeur du hourdis).
En conséquence, pour les poutres en forme de T on a

$$K=\frac{\beta l}{2\pi z}(1-2a). \tag{4.42}$$

Sur le segment $l/2$ la somme des efforts V_b qui peuvent être transmis par la zone comprimée du béton est donnée par l'expression

$$S' = \int_0^{l/2} V_b \mathrm{d}x = \int_0^{l/2} KT_{(x)} \mathrm{d}x. \tag{4.43}$$

Nous utilisons les relations (4.41) et (4.39) et nous trouvons

$$S' = \int_0^{l/2} \frac{l}{2\pi z}(1-2a)q\left(\frac{l}{2}-x\right)\mathrm{d}x \tag{4.44}$$

Si l'on pose ici $\mathrm{d}x = l\mathrm{d}a$, il vient

$$S' = \frac{ql^3}{4\pi z}\int_0^{l/2}(1-2a)^2\mathrm{d}a = \frac{ql^3}{24\pi z}. \tag{4.45}$$

La surface entière des efforts tranchants pour $l/2$ est égale à

$$S = \frac{ql^2}{8}, \tag{4.46}$$

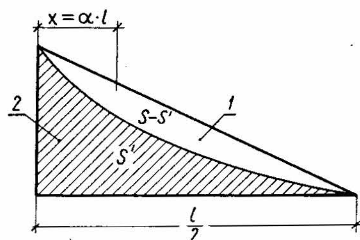


Fig. 4-12. Diagramme réduit des efforts tranchants pour le dimensionnement de l'armature transversale, d'après Bay

1 — aire des efforts tranchants transmis par l'acier, 2 — aire des efforts tranchants transmis par la zone comprimée du béton

et on peut calculer la valeur du rapport

$$\frac{S'}{S} = \frac{l}{3\pi z}. \tag{4.47}$$

En outre, l'inégalité suivante doit être satisfaite :

$$\frac{S'}{S} \leqslant 1.$$

Pour une poutre en forme de T uniformément chargée on trouve, en tenant compte de la formule (4.42), que

$$\frac{S'}{S} = \frac{\beta l}{3\pi z}. \tag{4.48}$$

Le coefficient K augmente quand la valeur a diminue. Ceci indique une augmentation de V_b vers l'appui, d'où il résulte d'abord une diminution du volume de l'armature transversale nécessaire et ensuite un déplacement de cette armature vers le centre de la travée. Pour un cas limite, quand $\dfrac{\beta l}{3\pi z} = 1$, le centre de gravité de la surface représentative des efforts de cisaillement se trouve à la distance $x = l/4$ (fig. 4-12).

Bay a effectué la vérification expérimentale de ses considérations théoriques sur les poutres Nos 1026 et 1025 examinées dans les essais de DAfE Heft 48. Ces essais sont présentés ici en détail au chapitre 5. Les poutres en question ont été réalisées en un béton dont la résistance sur prisme était la même et égale à 282 kgf/cm². Leur capacité portante était aussi identique malgré le fait que la première (No 1026) a été munie d'une armature transversale calculée pour le cisaillement à 100 %, tandis que la seconde (No 1025) était calculée seulement pour 50 %.

La rupture de ces deux poutres s'est produite par l'écoulement de l'acier au centre de la travée sous la force de rupture de même ordre de grandeur dans ces deux cas.

D'après BAY, le coefficient de réduction de l'effort tranchant S'/S pour la poutre No 1026 est pour

$$\frac{l}{z} = \frac{540}{0{,}85 \cdot 65} \approx 10 \quad \text{et} \quad \text{pour } \beta = \frac{b_0}{b_1} = \frac{40}{120} \approx 0{,}33$$

$$S'/S = \frac{l}{z}\frac{\beta}{3\pi} = 10 \cdot \frac{0{,}33}{3 \cdot 3{,}14} = 0{,}4.$$

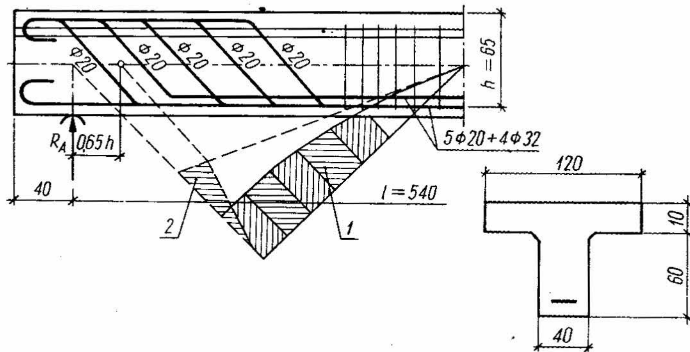


Fig. 4-13. Application de l'aire réduite du diagramme des efforts tranchants, d'après BAY, au dimensionnement de l'armature transversale de la poutre No 1026 dans les essais de DAfE, cahier 48

1 — aire des efforts tranchants transmis par l'armature transversale (S—S'), 2 — aire négligée dans le dimensionnement de l'armature vu les contraintes σ_y (10 % environ)

Si, de plus, on tient compte de la diminution des contraintes de traction obliques, produite par les contraintes σ_y dans la zone au voisinage de l'appui, la surface effective des efforts tranchants est égale à 50 % de la surface initiale. La diminution en question correspond, d'après BAY, à 10 % environ du diagramme des contraintes de cisaillement calculées. La figure 4-13 représente l'armature de la poutre d'après la méthode de BAY : cette armature est dimensionnée en tenant compte de la surface réduite du diagramme des contraintes de cisaillement (surface hachurée). Le volume de cette armature est voisin de celui de la poutre No 1025 (voir la figure 5-26b), qui, avec l'armature transversale diminuée de 50 %, a eu la même capacité portante que la poutre No 1026 armée à 100 %.

4.5. MÉTHODE DE WALTHER

La théorie d'état limite de la zone de cisaillement de WALTHER a été présentée pour la première fois à Berlin au Congrès de la Fédération Internationale de la Précontrainte en 1958. Après les essais ultérieurs effectués à Otto-Graf-Institut à Stuttgart, WALTHER a développé et modifié sa théorie en la présentant sous sa forme définitive dans l'ouvrage [81]

en 1962. Cette théorie, de même que les précédentes, est basée sur l'analyse d'état limite de rupture dans la zone comprimée du béton à l'extrémité de la fissure oblique où sont appliqués simultanément le moment fléchissant et l'effort tranchant. Quand l'effort tranchant diminue, l'analyse d'après WALTHER permet de formuler une transition continue entre « une rupture par cisaillement » et « une rupture par flexion ». La théorie de WALTHER ne concerne pas la rupture par écrasement du béton dans les nervures minces dans les poutres en forme de T ou de double T. Cet écrasement peut être causé par les contraintes principales obliques de compression avec des contraintes de cisaillement τ élevées, jusqu'à 0,7 σ_{pr} environ. WALTHER a introduit une nouvelle notion de la résistance à la compression dans le cisaillement; c'est une hypothèse de base dans son analyse de la sollicitation du béton dans la zone comprimée. Cette résistance est désignée ici par τ_b, elle est déterminée par l'hypothèse de MOHR et elle est d'autant plus petite, par rapport à la résistance à la compression σ_{pr}, que la contrainte τ est plus élevée dans la section étudiée.
WALTHER a supposé, d'après Roš, la courbe intrinsèque de MOHR sous la forme de parabole du deuxième degré en admettant $\frac{\sigma'}{\sigma_{pr}} = \frac{1}{8}$. Dans ces hypothèses la courbe intrinsèque de MOHR prend la forme:

$$\tau^2 - \frac{1}{2}\sigma_{pr}\sigma - \frac{1}{16}\sigma_{pr}^2 = 0. \tag{4.49}$$

En faisant l'abstraction de l'influence des contraintes σ_y, le cercle de MOHR en question est décrit par l'équation

$$\sigma^2 + \tau^2 - \sigma_x\sigma - \tau_{xy} = 0. \tag{4.50}$$

D'après MOHR, la rupture succède à l'état des contraintes pour lequel le cercle (4.50) est tangent à la courbe intrinsèque (4.49); cela est représenté par l'équation

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{pr}}\right)^2 - \frac{\sigma_x}{\sigma_{pr}} + \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{pr}}\right)^2 = 0. \tag{4.51}$$

Dans le cas où $\frac{\sigma_x}{\sigma_{pr}} < 1/4$, le cercle (4.50) est tangent à la courbe intrinsèque de MOHR à son sommet et la condition de rupture s'écrit

$$\frac{8\tau_{xy}}{\sigma_{pr}} - \frac{8\sigma_x}{\sigma_{pr}} - 1 = 0. \tag{4.51a}$$

Les équations (4.51) et (4.51a) représentent un critère mathématique de rupture d'après la théorie de MOHR, pour un état de contrainte à deux dimensions avec $\sigma_y = 0$. Ceci est reproduit géométriquement dans le diagramme $(\sigma - \tau)$ partiellement par la surface elliptique b et partiellement par la surface parabolique a (fig. 4-14). Chaque combinaison des contraintes σ_x et τ_{xy} qui se trouve en dehors de la zone hachurée mène à la rupture de la structure du béton.

Ensuite, il faut déterminer la contrainte normale $\sigma_x = \tau_b$ qui, avec une contrainte de cisaillement τ_{xy} correspondante, conduit à la rupture de la zone comprimée du béton. Pour

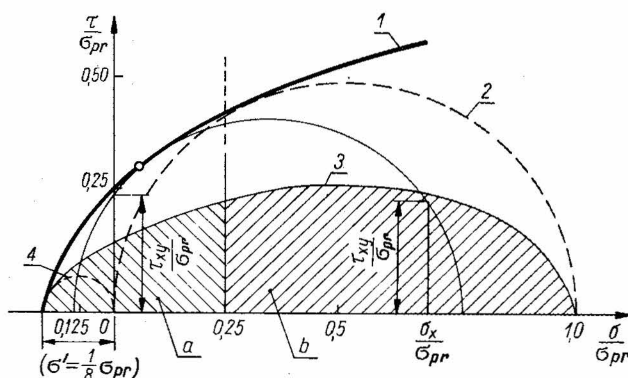


Fig. 4-14. Critère de résistance du béton dans la zone de cisaillement [81]

1 — courbe intrinsèque de MOHR, *2 — cercle des contraintes de la compression uni-axiale, 3 — critère de rupture dans un état plan de contrainte, 4 — cercle des contraintes de la tension uni-axiale*

simplifier le problème, nous supposons une distribution uniforme des contraintes τ_{xy} et σ_x (fig. 4-15) et nous avons

$$\tau_{xy} = \frac{V_b}{bx} = \frac{T}{bx}, \tag{4.52}$$

$$\tau_b = \sigma_x = \frac{N_{bx}}{bx} = \frac{M}{bx\left(h - \dfrac{x}{2}\right)}. \tag{4.53}$$

Pour déterminer τ_b on peut admettre que

$$h - \frac{x}{2} \approx 0{,}9h,$$

et par conséquent on a

$$\frac{\tau_b}{\tau_{xy}} = \frac{M}{0{,}9Th}.$$

En employant les relations ci-dessus, nous obtenons de l'équation (4.51) que

$$\Psi = \frac{\tau_b}{\sigma_{pr}} = \frac{1}{1+3{,}2\left(\dfrac{Th}{M}\right)^2}. \tag{4.54}$$

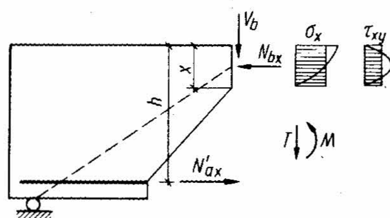


Fig. 4-15. Disposition simplifiée des efforts et des contraintes dans la zone de cisaillement sans armature transversale

Sans aucun doute la contrainte σ_y influe aussi sur la valeur de la résistance calculée τ_b. Il est possible de prendre en considération cette influence moyennant le critère de MOHR. Il s'avère cependant difficile de définir le lieu et la valeur de la contrainte critique, car les contraintes σ_y élevées qui se forment dans le voisinage immédiat de la force concentrée disparaissent rapidement. C'est pourquoi l'influence de cette contrainte dépend dans une large mesure du lieu de la fissure oblique ainsi que de sa profondeur dans la zone compri-

mée. Dans cette situation une formulation mathématique précise de l'influence de la contrainte σ_y n'est pas possible. Pour les besoins pratiques il ne faudrait tenir compte des contraintes σ_y que dans les poutres chargées par des forces concentrées et exclusivement pour $\frac{M}{Th} > 3{,}0$, car c'est seulement dans ces cas que les contraintes σ_y s'opposent efficacement à la destruction. Le critère de la rupture de MOHR (4.51) en prenant en considération les contraintes σ_y s'écrit

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2-\sigma_{pr}(\sigma_x-\sigma_y)+4\tau_{xy}^2=0, \tag{4.55}$$

ou bien, après transformations,

$$\sigma_x=\tau_b=\frac{\left(1+\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)\sigma_{pr}}{\left(1-\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)^2+4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x}\right)^2}. \tag{4.56}$$

Par cette relation on peut démontrer que la valeur maximale de τ_b avec $\frac{M}{Th} < 3{,}0$ se manifeste quand les contraintes verticales σ_y sont environ deux fois plus élevées que les contraintes horizontales. Si nous portons $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=2$ dans la formule (4.56) et avec $\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x}=$ $=0{,}9\frac{Th}{M}$ comme précédemment, l'équation prend la forme :

$$max\,\tau_b=\frac{3\sigma_{pr}}{1+3{,}2\left(\frac{Th}{M}\right)^2}. \tag{4.57}$$

La comparaison des équations (4.57) et (4.54) nous enseigne que la résistance τ_b dans la zone d'application de la force concentrée est, dans le cas le plus favorable, trois fois

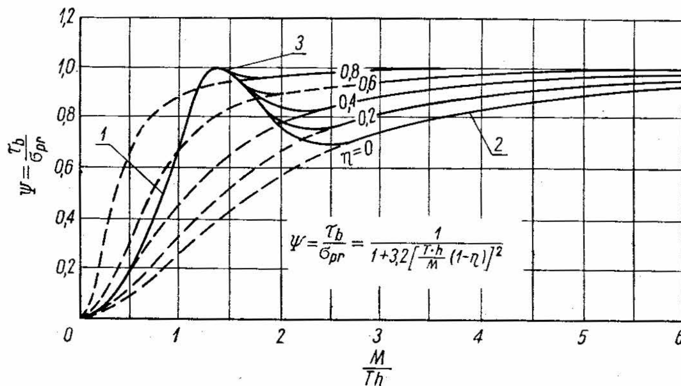


Fig. 4-16. Diagrammes de la résistance à la compression avec le cisaillement τ_b en fonction de $\frac{M}{Th}$ et du coefficient η [81]

1 — courbe d'après l'équation (4.57), 2 — courbes d'après les équations (4.60), 3 — influence des contraintes σ_y au point d'application d'une force concentrée

plus grande que τ_b en dehors de cette zone. Sur la base des essais on peut admettre que ce cas se présente effectivement pour $\frac{M}{Th} \leqslant 1{,}5$, et que pour $\frac{M}{Th} = 1{,}5$ à 3,0 on a affaire à une zone intermédiaire. Les valeurs du coefficient $\Psi = \frac{\tau_b}{\sigma_{pr}}$ en fonction du rapport $\frac{M}{Th}$ sont représentées par la figure 4-16 d'après les formules (4.54) et (4.59). Les courbes « *2* » tiennent compte du coefficient η qui exprime la mesure dans laquelle l'effort tranchant est transmis par l'acier

$$\eta = \frac{A'_v}{t} \frac{Q'_{ae} z}{T_{crit} \sin\theta}; \tag{4.58}$$

ici les notations sont :

$\frac{A'_v}{t}$ = aire réduite de l'armature transversale (par unité de longueur),

t = espacement des étriers verticaux ou inclinés,

θ = angle d'inclinaison des étriers par rapport à l'axe de la poutre,

$T_{crit} = \omega \cdot T_{g+p}$ = effort tranchant sous la charge critique,

Q'_{ae} = contrainte dans l'acier correspondant à la déformation plastique de 0,2 ‰.

De la formule (4.58) il résulte que le coefficient η détermine cette partie de l'effort tranchant qui est transmise par l'armature transversale à l'état de rupture. Ainsi, la zone comprimée du béton se trouve déchargée et la formule (4.54) prend la forme

$$\Psi = \frac{\tau_b}{\sigma_{pr}} = \frac{1}{1+3{,}2\left[\frac{Th}{M}(1-\eta)\right]^2}. \tag{4.59}$$

Quand la poutre est munie d'une armature transversale complète ($\eta = 1$), le coefficient $\Psi = 1$, c'est-à-dire τ_b est égal à σ_{pr}.

L'hypothèse des sections planes après la déformation n'est pas valable dans la zone de cisaillement, aussi bien avant qu'après la fissuration. Malgré cela la plupart des théories du cisaillement ne tiennent pas compte des conditions de déformation. En conséquence, d'une part on obtient les simplifications désirées, mais d'autre part la validité de ces théories s'avère sensiblement limitée. WALTHER, entre autres, a le mérite d'avoir formulé les hypothèses de la déformation dans l'état limite de rupture, qui sont à la fois simples et suffisamment précises pour les besoins pratiques. D'après WALTHER la déformation dans la zone de cisaillement est définie par la rotation autour du point O situé à l'extrémité de la fissure oblique principale (figure 4-17) ; à présent la position de cette fissure n'est pas connue. En tenant compte des notations données par la figure 4-17, la condition de la déformation s'écrit de la manière suivante

$$\frac{\Delta_{so}}{\Delta_{su}} = \frac{\varrho x}{\varrho(h-x)} \sin\alpha = \frac{k_x}{1-k_x} \sin\alpha, \tag{4.60}$$

où $k_x = \frac{x}{h} = \xi$.

Dans le cas de contraintes de cisaillement élevées, outre la rotation, une déformation supplémentaire de la nervure se manifeste. Dans les essais expérimentaux il résulte de ceci que l'ouverture de la fissure est plus importante à mi-hauteur de la nervure qu'en l'axe de l'armature tendue. Avec les notations de la figure 4-18 nous pouvons considérer cette influence en modifiant la formule (4.60)

$$\frac{\Delta_{so}}{\Delta_{su}} = \frac{k_\tau \varrho x}{\varrho(h-x)} \sin\alpha = k_\tau \frac{x}{h-x} \sin\alpha; \tag{4.60a}$$

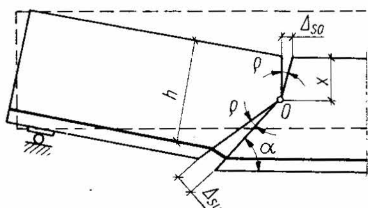


Fig. 4-17. Déformation due à la flexion dans la zone d'une fissure oblique [81]

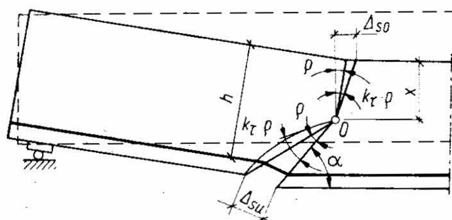


Fig. 4-18. Déformation dans la zone d'une fissure oblique en tenant compte des contraintes importantes de cisaillement [81]

ici $k_\tau \geqslant 1$ est un coefficient dépendant de la valeur de τ_u, c'est-à-dire des contraintes de cisaillement au moment de la rupture.

Le coefficient k_τ peut être calculé à partir des formules :
pour les étriers verticaux

$$k_\tau = \frac{\tau_n - \tau_{fu1}}{\tau_{fu1}} (1 - 0{,}75\eta);$$

pour les étriers inclinés

$$k_\tau = \frac{\tau_n - \tau_{fu1}}{\tau_{fu1}} (1 - \eta).$$

La déformation du bord comprimé Δ_{so} au voisinage de l'extrémité de la fissure oblique s'exprime par la formule suivante d'après WALTHER

$$\Delta_{so} = \varepsilon_b h \sqrt{k_x}\,. \tag{4.61}$$

La déformation du béton ε_b dépend de la contrainte sur le bord à l'état de rupture ($\sigma_b = \tau_b$). WALTHER a exprimé cette relation par la formule suivante

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b\,max}} = \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_{pr}}\right)^2 = \left(\frac{\tau_b}{\sigma_{pr}}\right)^2 = \Psi^2.$$

En portant cette formule dans (4.61), on trouve

$$\Delta_{so} = \Psi^2 \varepsilon_{b\,max} h \sqrt{k_x} \tag{4.61a}$$

où l'on peut prendre $\varepsilon_{b\,max} = C^{te} = 0{,}003 = 3\ ^0/_{00}$.

La déformation du bord tendu Δ_{su} dépend de la déformation de l'acier ε'_a, de l'étendue de la zone endommagée par la fissure oblique et de l'adhérence entre l'acier et le béton, le tout étant exprimé par la formule

$$\Delta_{su} = \varepsilon'_a \frac{h-x}{\sin\alpha} k_b \frac{1}{\Psi^2}. \tag{4.62}$$

Ici on voit apparaître pour la première fois le coefficient k_b qui tient compte de l'adhérence entre l'acier et le béton ; on peut le calculer d'après la formule

$$k_b = \left(0{,}9+0{,}3\frac{\bar{\omega}}{\sigma_{pr}}\right)\chi \sqrt{\frac{\Phi}{\Phi_0}}, \tag{4.63}$$

où : $\bar{\omega}$ = pourcentage de l'armature longitudinale,
χ = coefficient qui varie en fonction de l'adhérence entre l'acier et le béton; il est égal à 1,0 pour une armature à adhérence améliorée, et à 1,5 pour une armature lisse,
σ_{pr} = résistance du béton mesurée sur prisme, en kgf/cm^2,
Φ = diamètre des barres de l'armature longitudinale, exprimé en mm,
Φ_0 = diamètre comparatif, $\Phi_0 = 26$ mm.

Le coefficient η, qui exprime le pourcentage de l'armature transversale par rapport à 100 % dans une poutre munie d'une armature complète, et l'influence des contraintes σ_y sur les déformations dans la zone tendue sont considérés ici en cherchant les valeurs dans les diagrammes de la figure 4-16.

En employant les formules (4.60), (4.61a) et (4.62) on peut ramener les relations des déformations dans un état arbitraire de contrainte aux déformations dans l'état limite

$$\frac{\Delta_{so}}{\Delta_{su}} = k_\tau \frac{k_x}{1-k_x}\sin\alpha = \frac{\Psi^2 \varepsilon_{b\,max} h\sqrt{k_x}}{\varepsilon'_a \dfrac{h-x}{\sin\alpha} k_b \dfrac{1}{\Psi^2}},$$

et finalement la condition des déformations de la zone de cisaillement se réduit à la formule

$$\frac{\varepsilon_{b\,max}}{\varepsilon'_a} = \frac{k_\tau k_b}{\Psi^4}\sqrt{k_x}. \tag{4.64}$$

Pour déterminer les efforts dans l'état de rupture il faut, outre la condition des déformations, que soit satisfaite aussi la condition d'équilibre. La relation suivante résulte de la figure 4-15

$$N_{bx} = \tau_b bhk_x = N'_{ax} = A'_a\sigma_{zx} = A'_a\varepsilon'_a E_a,$$

d'où il vient

$$k_x = \frac{\bar{\omega}\varepsilon'_a E_a}{\tau_b} = \frac{\bar{\omega}\sigma_{zx}}{\tau_b}. \tag{4.65}$$

Le coefficient k_x déduit de ces deux conditions peut être obtenu en utilisant les formules (4.64) et (4.65) et l'on obtient

$$k_x^{3/2} = \frac{\Psi^3 \varepsilon_{b\,max} \overline{\omega} E_a}{k_\tau k_b \sigma_{pr}}. \tag{4.66}$$

L'équation (4.66) peut être facilement résolue dans les cas où la contrainte dans l'acier au moment de la rupture reste inférieure par rapport à la limite d'élasticité. Pour les contraintes plus élevées il faudrait introduire une valeur suppléante E_a définie d'après le diagramme σ—ε; ceci est un peu difficile dans la pratique.

Après avoir déterminé k_x à partir de la formule (4.66), on peut calculer le moment de rupture par cisaillement à l'aide de l'expression

$$M_{cu}^o \approx \tau_b b h^2 k_x \left(1 - \frac{k_x}{2}\right) + M_v. \tag{4.67}$$

Le deuxième terme M_v de cette formule tient compte des étriers et il peut être défini d'après la figure 4-19 par l'équation suivante

$$M_v = \tau_b b h^2 k_x \left(1 - \frac{k_x}{2}\right) \frac{\eta}{2\frac{M}{Th}}. \tag{4.68}$$

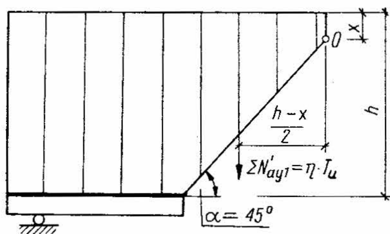


Fig. 4-19. Schéma supposé par WALTHER pour tenir compte de l'influence des étriers verticaux sur la valeur du moment de rupture par cisaillement $M_v = \eta T_u \frac{h-x}{2} \approx \eta T_u \frac{h}{2}$

En portant (4.68) dans (4.67) nous obtenons

$$M_{cu}^o \approx \tau_b b h^2 k_x \left(1 - \frac{k_x}{2}\right) \left(1 + \frac{\eta}{2\frac{M}{Th}}\right); \tag{4.67a}$$

ou bien nous exprimons le moment réduit de cisaillement

$$m_{cu}^o = \frac{M_{cu}^o}{\sigma_{pr} b h^2} = \Psi k_x \left(1 - \frac{k_x}{2}\right) \left(1 + \frac{\eta}{2\frac{M}{Th}}\right). \tag{4.67b}$$

La forme définitive de la formule pour le calcul de M_{cu}^o, d'après la théorie de WALTHER, démontre que le moment de rupture par cisaillement dépend non seulement de l'aire de la section transversale et des propriétés des matériaux, mais également de $\frac{M}{Th}$, de τ_0 et du coefficient η. La position de la section critique dans les poutres continues où M_{max} et T_{max} apparaissent simultanément est déterminée d'une maniere univoque. Par contre, dans les poutres simplement appuyées et chargées uniformément la section dangereuse se trouve au milieu de la travée (la rupture par flexion $M = M_{max}$, $T = 0$), ou bien dans la zone de cisaillement à la distance de 2 à 3 h de l'appui. Dans son ouvrage [81] R. WALTHER donne aussi plusieurs nomogrammes et tableaux qui permettent d'employer la théorie susdite dans la pratique.

4.6. MÉTHODE DE GOSCHY ET BALÁZS

GOSCHY et BALÁZS ont admis les hypothèses suivantes dans leur théorie d'état limite de la zone de cisaillement :

1. La section transversale de la poutre est rectangulaire avec deux axes orthogonaux x, y d'après la figure 4-20.
2. Les matériaux — béton et acier — ont des caractéristiques mécaniques conformes aux diagrammes présentés par la figure 4-20b.
3. L'épuisement de la capacité portante dans la section de rupture se manifeste par la rupture simultanée de l'acier et du béton.
4. L'étendue de la zone comprimée du béton, dans la section transversale où le moment M et l'effort tranchant T se manifestent simultanément et où le cisaillement est pris en considération, est telle que la condition suivante est satisfaite :

$$x_{M,T} \leqslant h.$$

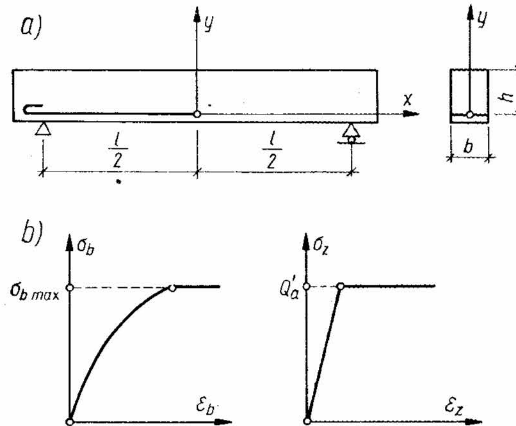


Fig. 4-20. Hypothèses pour l'étude théorique de GOSCHY et BALÁZS [32] : a) disposition de la poutre, b) diagrammes caractérisant les matériaux

5. La contrainte normale réduite dans la section au-dessus de la fissure oblique s'exprime par l'équation déduite du critère de MOHR

$$\sigma_{red} = \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}, \tag{4.69}$$

ou bien, sous la forme des contraintes de cisaillement,

$$\tau = \frac{\sigma_{red}}{1+k}\sqrt{1-(1-k)\frac{\sigma}{\sigma_{red}} - k\frac{\sigma^2}{\sigma_{red}^2}}, \tag{4.69a}$$

où $k = \dfrac{\sigma'}{\sigma_{pr}}$.

6. En utilisant la courbe intrinsèque de MOHR sous la forme d'une droite tangente à deux cercles correspondant respectivement à la compression axiale et à la traction axiale (voir fig. 2-7), GOSCHY et BALÁZS admettent la contrainte limite de cisaillement donnée par la formule

$$\tau_G = \frac{\sigma_{pr}\sigma'}{\sigma_{pr}+\sigma'} = \frac{k}{1+k}\sigma_{pr}. \tag{4.70}$$

7. Dans la section au-dessus de la fissure oblique on suppose une variation linéaire des contraintes normale et réduite :

$$\sigma = \sigma_{pr}\frac{y}{y_0}; \qquad \sigma_{red} = k\sigma_{pr}+(1+k)\sigma_{pr}\frac{y}{y_0}.$$

Ces hypothèses étant admises, la valeur maximale de la contrainte de cisaillement $\tau_{G\,max}$, qui apparaît simultanément avec la contrainte normale $\sigma = \frac{1-k}{2}\sigma_{pr}$, est donnée par la formule

$$\tau_{G\,max} = \frac{\sqrt{k}}{2}\sigma_{pr}, \tag{4.71}$$

tandis que

$$\tau = \tau_G\sqrt{1+\frac{1-k}{k}\frac{\sigma}{\sigma_{pr}}-\frac{1}{k}\cdot\frac{\sigma^2}{\sigma_{pr}^2}}\,. \tag{4.72}$$

8. Les contraintes dans un élément de la section transversale (même dans l'état de plastification) satisfont à la condition d'équilibre exprimée par l'équation de CAUCHY

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0 \end{aligned}\right\} \tag{4.73}$$

En supposant pour les éléments à une dimension que $\sigma_y = 0$, nous obtenons en partant de l'équation (4.73) que $\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0$, ceci indique que les contraintes de cisaillement ne dépendent que de y, et les contraintes normales peuvent être calculées d'après l'équation

$$\sigma_x = -\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}x. \tag{4.74}$$

Si l'on désigne par $l_x = \frac{M_x}{T_x}$ la longueur dite de cisaillement et $\tau_{xy} = \tau$, $\sigma_x = \sigma$, la répartition des contraintes normales suivant l'axe des y est donnée par l'expression

$$\sigma = -\frac{\partial\tau}{\partial y}l_x = -\frac{\partial\tau}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}l_x; \tag{4.74a}$$

ici en tenant compte de l'équation (4.72) on a

$$\frac{\partial\tau}{\partial\sigma}=\tau_G\frac{\frac{1-k}{k}\frac{1}{\sigma_{pr}}-\frac{2}{k}\frac{\sigma}{\sigma_{pr}^2}}{2\sqrt{1+\frac{1-k}{k}\frac{\sigma}{\sigma_{pr}}-\frac{1}{k}\frac{\sigma^2}{\sigma_{pr}^2}}}. \tag{4.75}$$

Par intégration de l'équation (4.74a) avec les constantes d'intégration déterminées d'après la condition, pour $y=h$, $\sigma=\sigma_{pr}$ nous obtenons la répartition des contraintes dans la zone comprimée de la fonction suivante

$$\frac{y}{h}=\frac{l_x}{h}\frac{\tau_G}{k\sigma_{pr}}\left\{\sqrt{k}\left[\arcsin\frac{2\frac{\sigma}{\sigma_{pr}}-(1-k)}{1+k}-\frac{\pi}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1-k}{2}\operatorname{arc\,cos}h\frac{2k\frac{\sigma_{pr}}{\sigma}+1-k}{1+k}+\frac{h}{l_x}\frac{k\sigma_{pr}}{\tau_G}\right\}. \tag{4.76}$$

On calcule les contraintes σ dans l'axe neutre par l'équation (4.76) avec la condition aux limites $y/h=0$. Les contraintes de cisaillement τ résultent de l'équation

$$\frac{\sigma}{\sigma_{pr}}=\frac{1-k}{2}\left[1\pm\sqrt{1+\frac{4k}{(1-k)^2}\left(1-\frac{\tau^2}{\tau_G^2}\right)}\right]. \tag{4.77}$$

Si l'on désigne par x_M l'étendue de la zone comprimée sous l'application d'un seul moment fléchissant (flexion pure) et par $x_{M,T}$ l'étendue de cette zone sous l'action du moment et de l'effort tranchant, d'après les hypothèses de GOSCHY-BALÁZS on aura l'inégalité

$$x_M\leqslant x_{M,T}\leqslant h.$$

Etant donné que la répartition des contraintes $N_{b\,max}$ et T_{max} est connue, nous pouvons calculer $N_{b\,max}$ et T_{max} d'après les formules

$$N_{b\,max}=\int_0^{x_{M,T}}\sigma\mathrm{d}A, \tag{4.78}$$

$$T_{max}=\int_0^{x_{M,T}}\tau\mathrm{d}A. \tag{4.79}$$

Les diagrammes de σ et τ obtenus par cette méthode sont donnés par la figure 4-21.

D'après la brève description de la méthode analytique d'état limite de GOSCHY-BALÁZS on voit que la solution du problème exige beaucoup de calculs malgré le fait que l'analyse mathématique présentée ici ne concernait que le cas le plus simple où la section transversale était armée seulement par des barres dans la zone tendue et malgré l'introduction de plusieurs hypothèses simplificatrices. Pour que la méthode puisse avoir une application pratique il serait possible de présenter les valeurs des fonctions nécessaires pour le calcul des contraintes σ et τ sous la forme de tableaux ou de diagrammes. Ces travaux seraient utiles si la méthode pouvait servir dans le calcul des solutions générales pour les cas rencontrés

souvent dans la pratique. Mais il s'avère impossible de tenir compte de tous les facteurs importants, notamment à cause des difficultés mathématiques. C'est pourquoi la méthode analytique de GOSCHY-BALÁZS n'a qu'une importance d'explication, entre autres dans la

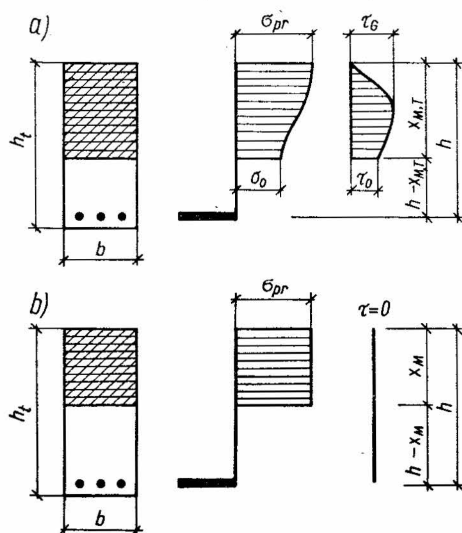


Fig. 4-21. Diagrammes de σ et τ déduits de l'étude théorique de GOSCHY et BALÁZS [32] : a) $M \neq 0$, $T \neq 0$, b) $M \neq 0$, $T \neq 0$.

démonstration théorique que l'axe neutre de flexion et celui de cisaillement ne sont pas identiques non seulement dans l'état de rupture mais également sous des charges beaucoup plus petites, y compris les charges d'exploitation.

4.7. MÉTHODE DE KANI

La méthode analytique de KANI [43] a été préparée sur la base des essais expérimentaux effectués par l'auteur à l'Université de Toronto. La partie principale des essais qui a permis de développer les considérations analytiques a concerné les poutres en béton armé à section rectangulaire, sans étriers et barres relevées. Les poutres étaient chargées par deux forces concentrées situées symétriquement (fig. 4-22). La longueur des poutres était variable

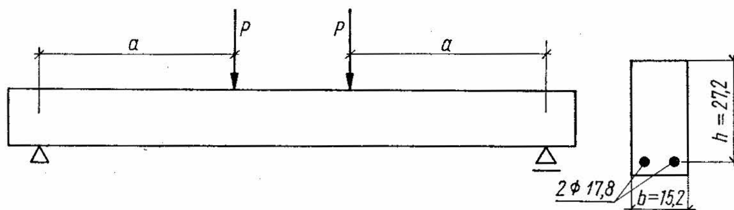


Fig. 4-22. Exemple d'une poutre en béton armé dans les essais de KANI

tandis que l'aire de la section transversale du béton et de l'armature était constante. Pour chaque série des poutres examinées on a employé l'acier de Q'_a constant et le béton de σ_{cyl} constant.

D'après les observations des phénomènes de fissuration et de rupture KANI a conclu que la capacité portante de la zone de cisaillement dans une poutre en béton armé est déterminée par deux schémas de disposition des efforts internes, à savoir : le schéma de la structure dite en forme de peigne et le schéma d'un arc, où l'armature principale joue le rôle d'un tirant. Le schéma de peigne apparaît après l'ouverture des fissures verticales

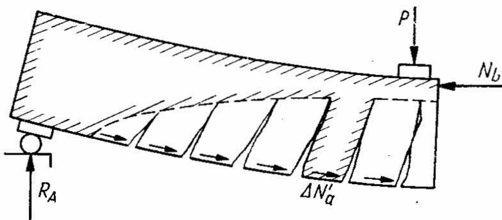


Fig. 4-23. Schéma d'une structure dite en forme de peigne dans la méthode de KANI [43]

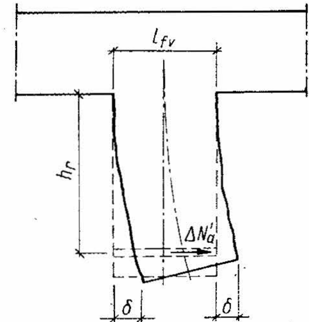


Fig. 4-24. Une dent en béton séparée de la structure en forme de peigne dans la méthode de KANI

Les éléments en béton séparés par les fissures sont traîtés comme les dents d'un peigne en béton, liées par la zone non fissurée du béton comprimé (fig. 4-23). Chaque « dent » est chargée au niveau de l'armature principale par un effort horizontal $\Delta N'_a$ qui représente la somme des contraintes d'adhérence entre l'acier et le béton sur la longueur d'une dent l_{fv} (fig. 4-24). Si l'on suppose une transmission uniforme de l'effort N'_a sur la longueur de cisaillement a on peut admettre que sur l'unité de longueur de la zone de cisaillement le béton est chargé par l'effort $\frac{N'_a}{a}$, où N'_a est égal à l'effort dans l'armature principale au milieu de la poutre entre deux forces extérieures P. Dans cette hypothèse chaque « dent » peut être considérée comme une console courte. Cette console peut supporter la charge jusqu'au moment où dans sa base la contrainte atteindra la résistance du béton à la traction σ'. La flexion des dents par l'effort N'_a a comme effet qu'une section plane avant la fissuration ne reste plus plane après l'ouverture des fissures.

En admettant ces hypothèses et avec les notations de la figure 4-24 nous pouvons écrire pour une dent dans l'état limite du schéma en peigne que

$$\sigma' = \frac{\Delta N'_a \, h_r}{\frac{b l_{fv}^2}{6}},$$

où autrement

$$\frac{\Delta N'_a}{l_{fv}} = \frac{\sigma'}{6}\frac{l_{fv}}{h_r}b = \frac{N'_a}{a}. \qquad (4.80)$$

En admettant que le bras de levier des efforts intérieurs est égal à $z = \frac{7}{8}h$, le moment fléchissant au milieu de la travée de la poutre peut être exprimé par la formule

$$M^o = \frac{7}{8}hN'_a,$$

ou bien en employant l'équation (4.80) par

$$M^o = \frac{7}{8}\frac{\sigma'}{6}\frac{l_{fv}}{h_r}bha. \qquad (4.81)$$

Si l'on désigne la partie du moment fléchissant ne dépendant que des caractéristiques de la section transversale par

$$M_0 = \frac{7}{8}\frac{\sigma'}{6}bh^2, \qquad (4.82)$$

on peut écrire que le moment fléchissant correspondant à l'épuisement de la capacité portante du schéma en peigne est égal à

$$M^o_{up} = M_0\frac{l_{fv}}{h_r}\frac{a}{h} = M^o. \qquad (4.83)$$

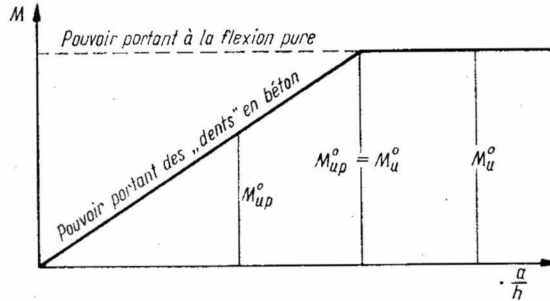


Fig. 4-25. Relation entre le moment de rupture M^o_{up} dans la structure en forme de peigne et l'élancement de cisaillement a/h [43]

De cette formule il résulte que le moment de rupture dans le schéma en peigne augmente linéairement avec l'élancement de cisaillement et qu'il atteint la valeur du moment de rupture pour une certaine valeur de $\frac{a}{h}$ (fig. 4-25). Quand la capacité portante du schéma en peigne se trouve épuisée pour certaines valeurs de l'élancement, la poutre ne se rompt pas mais elle passe à un schéma différent, celui d'un arc avec un tirant. Ce passage est signalé par des fissures qui, dans la zone de cisaillement, s'inclinent vers la direction de la force extérieure P. Cet état est montré par la figure 4-26a où la courbe des pressions entre

les sections *II—I* est une droite, car dans ce segment après l'ouverture d'une fissure oblique l'effort $\Delta N'_a$ est presque nul. Après l'ouverture d'une nouvelle fissure oblique (fig. 4-26b) les contraintes de traction disparaissent entre l'élément en béton et la partie de la poutre près de l'appui, séparés par les fissures. D'après KANI, ceci conduit à la disparition de l'effort initial $\Delta N'_a$, car la résultante des contraintes de traction $S_r = 0$ et la résultante

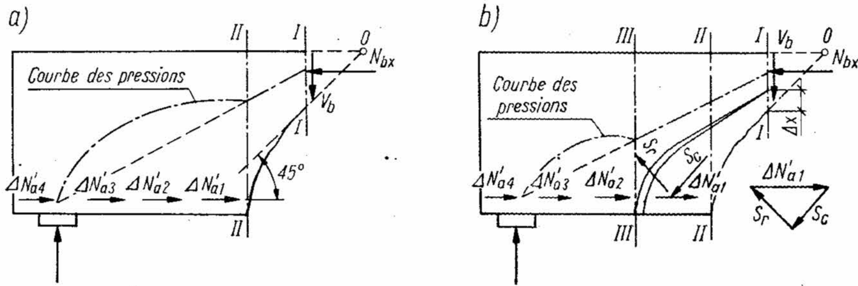


Fig. 4-26. Efforts intérieurs après la formation des fissures obliques [43] : a) une fissure oblique, b) deux fissures obliques

des contraintes de compression S_c perd son appui rigide sur l'armature et devient négligeable. La phase finale du schéma d'un arc est montrée sur la figure 4-27. La hauteur initiale x_0 de la zone comprimée correspondant à la première fissure oblique diminue avec chaque nouvelle fissure d'une valeur Δx pour prendre la valeur x avec l'ouverture de la fissure oblique extrême. D'après l'hypothèse de KANI, les directions de toutes les fissures obliques convergent vers un point O, situé au niveau du bord supérieur de la poutre à la distance de x_0 environ du point d'application de la force P (fig. 4-27).

En admettant que la distance s représente la longueur d'un appui rigide de l'arc en béton armé, tangent à la fissure oblique extrême, et en ~~utilisant~~ les relations géométriques présentées sur la figure 4-27, nous pouvons écrire

$$\frac{x}{x_0} = \frac{h}{a-s+x_0}. \tag{4.84}$$

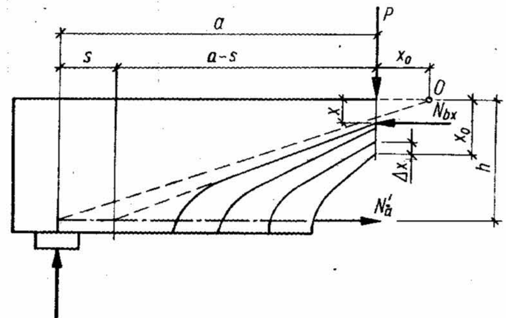


Fig. 4-27. Etat final de fissuration dans la zone de cisaillement [43]

De plus, si l'on suppose que les contraintes σ_x dans la zone comprimée de la flexion pure approchent des contraintes σ_x dans la zone de cisaillement et si l'on néglige l'influence peu importante de la différence du bras de levier, on obtient :

$$\frac{M^o_{up}}{M^o_u} = \frac{x}{x_0}.$$

Etant donné que s et x_0 sont des valeurs du même ordre de grandeur, en utilisant l'équation (4.84) nous avons

$$M^o_{up} = M^o_u \frac{h}{a}. \tag{4.85}$$

La rupture par cisaillement se produit dans la zone d'application de la force extérieure P, qui provoque dans cette zone la compression bi-dimensionnelle. Pour tenir compte de ce facteur, KANI introduit un coefficient expérimental $k = 0{,}9$.
Finalement, la formule (4.85) prend la forme

$$M^o_{up} = \frac{M^o_u h}{0{,}9a}. \tag{4.85a}$$

Sur la figure 4-28 on montre les résultats expérimentaux obtenus dans les essais de l'Université de Toronto et les résultats calculés sous la forme des courbes déduites de l'équation (4.83) pour le schéma en peigne et de l'équation (4.85a) pour le schéma d'un arc.

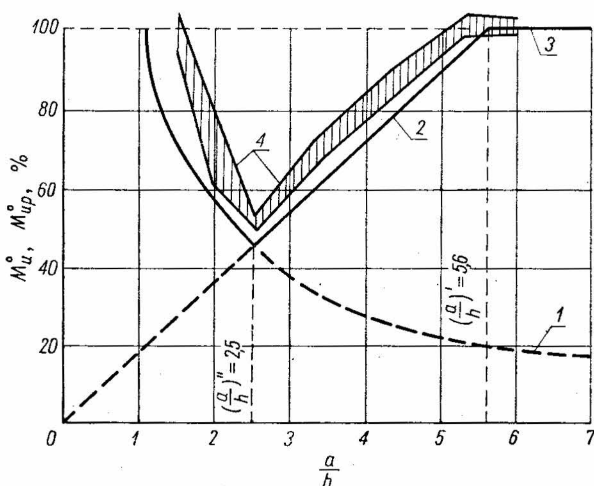


Fig. 4-28. Comparaison de résultats expérimentaux et théorique dans les essais de KANI [43]

1 — moment de rupture par cisaillement déduit du schéma d'un arc avec tirant, 2 — moment de rupture par cisaillement déduit du schéma de la structure en forme de peigne, 3 — moment de rupture par flexion calculé, 4 — aire contenant les résultats obtenus d'après les essais de KANI

Dans l'analyse de la capacité portante d'une poutre en béton armé, il est important de déterminer la valeur du rapport $\frac{a}{h}$ pour lequel la capacité portante de la zone de cisaillement d'une poutre sans armature transversale serait du même ordre de grandeur que la capacité portante de la zone de flexion pure. Ce rapport $\left(\frac{a}{h}\right)'$ peut être calculé en utilisant l'équation

(4.83) pour déterminer le moment M^o_{cup}, qui est ensuite comparé au moment de rupture par flexion

$$M^o_{up} = M_0 \frac{l_{fv}}{h_r} \left(\frac{a}{h}\right)' = M^o_{cu}, \qquad (4.86)$$

d'où il vient $\left(\frac{a}{h}\right)' = \frac{M^o_{cu}}{M_0} \frac{l_{fv}}{h_r}$.

En prenant $M^o_u = \frac{7}{8} hA'_a Q'_a$ et en substituant M_0 de la formule (4.82), nous aurons

$$\frac{M^o_u}{M_0} = \frac{\frac{7}{8} hA'_a Q'_a}{\frac{7}{8}\frac{\sigma'}{6} bh^2} = 6\overline{\omega} \frac{Q'_a}{\sigma'}.$$

Finalement, le rapport $\left(\frac{a}{h}\right)'$ correspondant à la rupture par flexion, dans le cas où la limite d'écoulement dans l'armature principale est atteinte, est donné par la formule

$$\left(\frac{a}{h}\right)' = 6\overline{\omega} \frac{Q'_a}{\sigma'} \frac{h_r}{l_{fv}}. \qquad (4.87)$$

En substituant ici les données de la série C des poutres étudiées à Toronto ($\overline{\omega} = 1{,}88$ %, $Q'_a = 3570$ kgf/cm², $\sigma' = 0{,}15\ \sigma_{cyl} = 38$ kgf/cm² et les valeurs moyennes mesurées $l_{fv} = 15$ cm et $h_r = 7{,}87$ cm), KANI a trouvé

$$\left(\frac{a}{h}\right)' = \frac{6 \cdot 1{,}88}{100} \cdot \frac{3570}{38} \cdot \frac{7{,}87}{15} = 5{,}6.$$

Comme on le voit d'après la figure 4-28, les résultats théoriques et expérimentaux sont très rapprochés, ces derniers sont situés à l'intérieur de la zone hachurée.

En utilisant la valeur caractéristique $\left(\frac{a}{h}\right)'$ définie par l'équation (4.87), nous pouvons écrire l'équation de la capacité portante du schéma en peigne sous la forme suivante

$$M^o_{up} = \frac{M^o_u}{\left(\frac{a}{h}\right)'} \frac{a}{h}. \qquad (4.88)$$

Le second point intéressant du diagramme de la figure 4-28, c'est celui de l'intersection des courbes de capacité portante du schéma en arc et du schéma en peigne. Ce point, déterminé par les deux équations (4.85) et (4.88), désigne une seule capacité portante

$$\frac{M^o_u}{0{,}9} \frac{h}{a} = \frac{M^o_u}{\left(\frac{a}{h}\right)'} \frac{a}{h},$$

d'où nous obtenons

$$\left(\frac{a}{h}\right)'' = \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)' \frac{1}{0{,}9}}. \qquad (4.89)$$

Par la substitution de la valeur calculée ci-dessus $\left(\frac{a}{h}\right)' = 5{,}6$, nous obtiendrons

$$\left(\frac{a}{h}\right)'' = \sqrt{\frac{5{,}6}{0{,}9}} = 2{,}5.$$

Pour ces valeurs caractéristiques de l'élancement de cisaillement on aura un moment minimal de rupture, qui peut être calculé à partir de la formule (4.88)

$$M^o_{up} = M^o_u \frac{2{,}5}{5{,}6} = 0{,}45 M^o_u.$$

Le moment effectif de rupture pour l'élancement de cisaillement égal à 2,5 s'élevait dans les essais de KANI à 0,48 du moment de rupture par flexion; donc les résultats expérimentaux et analytiques concordent d'une manière satisfaisante.

Il est à remarquer que les essais de KANI ont été réalisés sur 133 poutres, comme celle qui est présentée sur la figure 4-22, avec trois paramètres variables, à savoir :

— qualité du béton ($\sigma_{wu} = 176$ kgf/cm², $\sigma_{wu} = 256$ kgf/cm², $\sigma_{wu} = 350$ kgf/cm²),

— pourcentage de l'armature principale ($\bar{\omega} = 0{,}50$ %, $\bar{\omega} = 0{,}80$ %, $\bar{\omega} = 1{,}88$ %, $\bar{\omega} =$ $= 2{,}8$ %),

— élancement de cisaillement $\left(\frac{a}{h} = \text{de } 1{,}0 \text{ à } 7{,}0\right)$.

D'après ses essais, KANI est arrivé aux conclusions suivantes :

a. La capacité portante de la zone de cisaillement pour les bétons des qualités examinées, dont σ_{wu} était de 176 kgf/cm² à 350 kgf/cm² (de 2500 psi à 5000 psi), ne dépend pas de la résistance du béton.

b. La capacité portante relative des poutres en béton armé de section rectangulaire sans armature transversale soumises au cisaillement est définie par le rapport $\frac{M_{cu}}{M_u}$.

Elle dépend du pourcentage de l'armature $\bar{\omega}$ et de l'élancement de cisaillement $\frac{a}{h}$ (shear arm ratio). Par exemple, pour

$$\sigma_{wu} = 176 \text{ kgf/cm}^2, \quad \bar{\omega} = 2{,}8\ \% \quad \text{et} \quad \frac{a}{h} = 2{,}5$$

nous aurons $\frac{M_{cu}}{M_u} = 0{,}5$, mais si dans ces conditions on ne change que le pourcentage de l'armature longitudinale en prenant $\bar{\omega} = 0{,}5$ %, on obtient $\frac{M_{cu}}{M_u} = 1{,}0$ et on peut conclure que l'armature transversale est inutile, car pour tous les rapports $\frac{a}{h}$ la poutre en question sans aucune armature transversale subit la rupture par flexion.

La zone où les poutres rectangulaires peuvent être soumises à la rupture par cisaillement est représentée par KANI dans un système de trois axes orthogonaux : $\frac{a}{h}$, $\bar{\omega}$ et $\frac{M_{cu}}{M_u}$ (la zone K-D_4-D_3-D_2-M-T_2-T_3-T_4, figure 4-29 d'après ACJ, juin 1966).

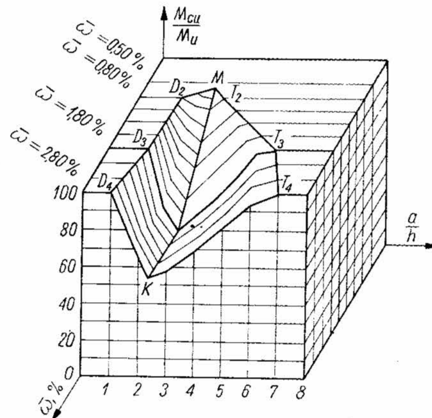


Fig. 4-29. Capacité portante de la poutre $\left(\frac{M_{cu}}{M_u}\right)$ en fonction de a/h et de $\bar{\omega}$, d'après [43]

KANI n'a pas examiné les relations mentionnées dans le cas d'une charge uniformément répartie, néanmoins il a suggéré que pour ces poutres il faut calculer l'élancement de cisaillement en admettant $a = l/4$. Cette relation découle du schéma suppléant donné par la figure 4-30 a, b, c. En supposant pour les poutres simplement appuyées et uniformément chargées l'élancement $a = l/4$, KANI a vérifié sa théorie utilisant dans ce but les résultats des essais de LEONHARDT-WALTHER [51] (voir la fig. 4-30d).

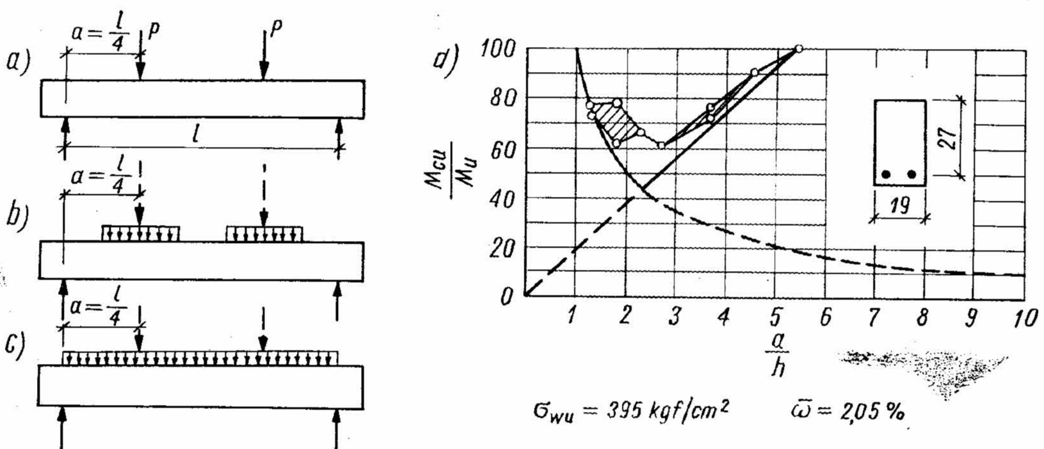


Fig. 4-30. Capacité portante de la poutre $\left(\frac{M_{cu}}{M_u}\right)$ soumise à une charge uniformément répartie, d'après [43]

5. PROBLÈME DU CISAILLEMENT D'APRÈS LES EXPÉRIENCES

5.1. TYPES DE RUPTURES DES POUTRES EN BÉTON ARMÉ

En fonction de la quantité d'armatures longitudinale et transversale, de la forme de la section, du rapport $\frac{M}{Th}$, de l'adhérence des armatures au béton et du mode d'ancrage des barres au-dessus des appuis, nous distinguons comme suit quelques types de rupture de la zone de cisaillement.

Rupture par cisaillement et flexion

Ce type de rupture se caractérise par la disposition des fissures représentée sur la figure 5-1. Il peut apparaître quand la poutre est relativement ramassée et qu'elle n'est pas suffisamment armée à la flexion sur toute sa longueur. Dans le cas où, par exemple, on a réduit l'armature en fonction du diagramme des moments, la limite d'écoulement de l'acier de l'armature principale est atteinte en dehors du centre de la poutre, dans la zone de

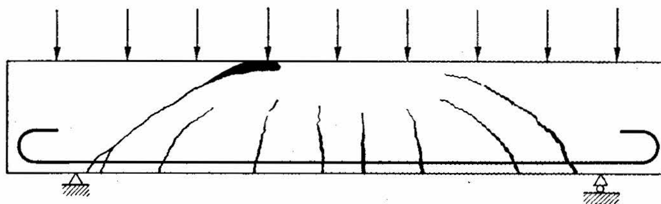


Fig. 5-1. Fissuration lors de la rupture par cisaillement et flexion [65]

l'action simultanée de T et M. Ceci conduit à un cheminement excessif de la fissure oblique et finalement à la rupture du béton dans la section au-dessus de cette fissure. Il est en effet rare, et plutôt fortuit, que se produise un épuisement simultané de la capacité portante par flexion dans la section de M_{max} et par compression dans la section de $M_{(x)}$, $T_{(x)}$, car dans l'état actuel de nos connaissances sur le cisaillement il est difficile de dimensionner un élément en béton armé de telle façon que ces deux phénomènes apparaissent en même temps.

Rupture par cisaillement et compression

Cette sorte de rupture peut intervenir dans les poutres dont l'armature principale est relativement importante et l'armature transversale faible ou même inexistante. La cause de la rupture est la destruction du béton par séparation et glissement dans la zone de compression au-dessus de l'extrémité de la fissure oblique. A cet endroit, une espèce d'articulation se forme, autour de laquelle a lieu une rotation des deux parties de la poutre séparées par la fissure oblique (fig. 5-2), avec un glissement tangentiel simultané. Il est

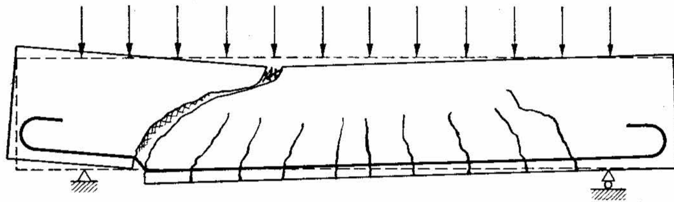


Fig. 5-2. Fissuration lors de la rupture par cisaillement et compression [65]

caractéristique, pour ce type de rupture, que l'épuisement complet de la capacité portante d'un élément en béton armé puisse se manifester rapidement et sans avertissement, pour les contraintes dans l'armature principale $\sigma_a < Q'_a$.

Certains chercheurs appellent, improprement, « rupture par coupure » ce type de rupture de la zone comprimée.

Rupture par cisaillement avec glissement

Dans le cas où, après l'apparition des premières fissures obliques, l'ouverture d'une de celles-ci augmente avec la charge et de nombreuses petites fissures inclinées s'ouvrent au niveau de l'armature principale (fig. 5-3), l'adhérence de l'acier au béton disparaît graduellement.

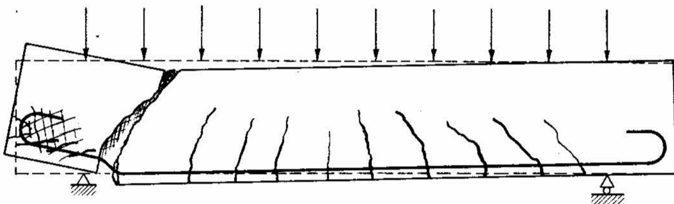


Fig. 5-3. Fissuration lors de la rupture par cisaillement avec glissement [65]

Finalement, l'épuisement de la capacité portante de l'élément est causé par le glissement des armatures principales dans l'ancrage au-dessus de l'appui. Dans ce cas, les crochets des barres lisses provoquent des éclatements visibles sur les faces frontales de la poutre si l'armature locale transversale n'est pas convenablement prévue.

Rupture par coupure

Ce type de rupture sous une charge uniformément répartie peut arriver dans les poutres-cloisons (fig. 5-4) où les poteaux sont encastrés dans les poutres, conformément aux résultats des essais réalisés par l'auteur [25]. Le développement des fissures dans une poutre-cloison est montré par la figure 5-4, où les valeurs de la charge sont exprimées en tonnes. Dans les poutres minces, la rupture par coupure ne peut intervenir que dans le cas d'un effort transversal très important avec un faible moment fléchissant, donc surtout quand une force concentrée est appliquée près de l'appui (fig. 5-5).

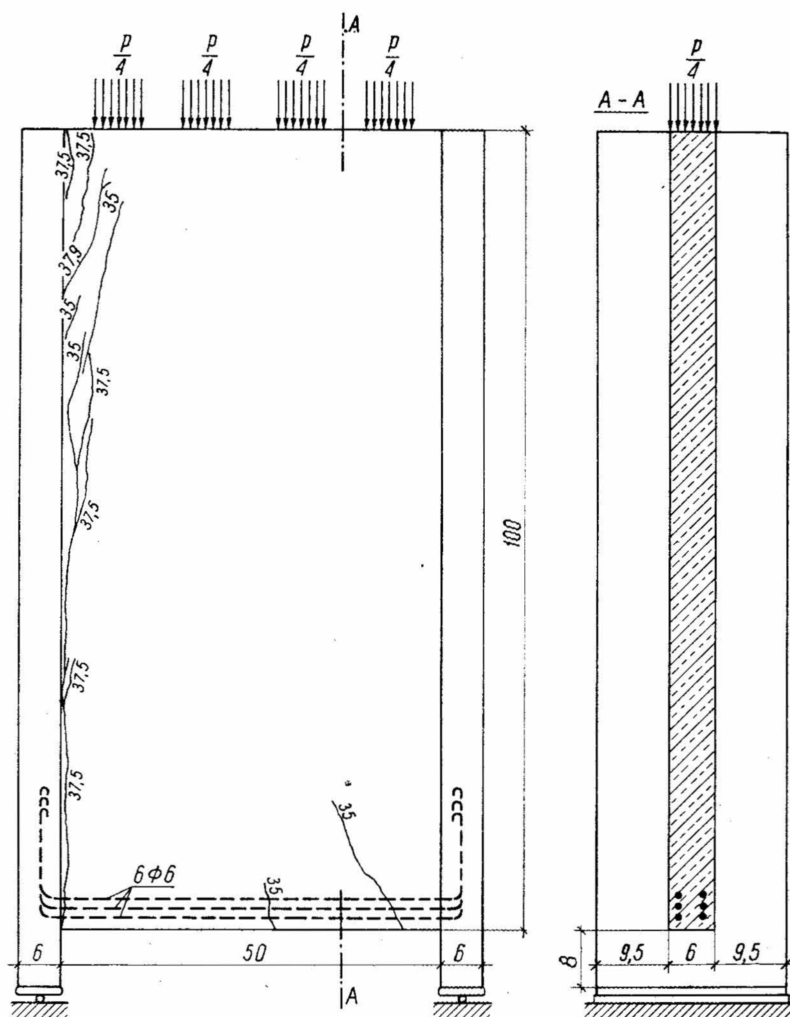


Fig. 5-4. Fissuration dans une poutre-cloison lors de la rupture par coupure

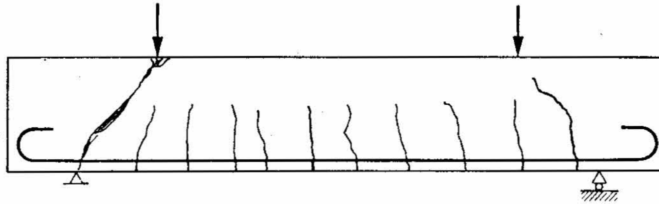


Fig. 5-5. Fissuration d'une poutre mince lors de la rupture par coupure [65]

Rupture par dépassement de la résistance du béton à la compression oblique

L'épuisement de la capacité portante de la poutre en béton armé se manifeste ici avec $\sigma_b = \sigma_2 \approx \sigma_{pr}$, dans les sections en forme de T avec un hourdis comprimé large et avec une nervure mince, armée fortement par des étriers. Dans ce cas, les contraintes inclinées de compression dans les bielles en béton découpées par les fissures obliques peuvent atteindre presque la valeur de la résistance du béton sur prisme. Ce type de rupture est représenté sur la figure 5-6 [5]. On y voit également les autres types de rupture par cisaillement mentionnés ci-dessus.

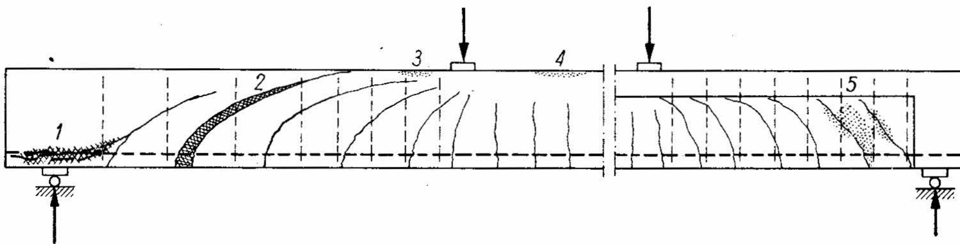


Fig. 5-6. Comparaison des types de rupture dans la zone de cisaillement [72]

1 — rupture par cisaillement avec glissement, 2 — rupture par cisaillement avec flexion, 3 — rupture par cisaillement et compression, 4 — rupture par flexion, 5 — rupture par dépassement de la résistance du béton à la compression oblique $\sigma_2 \approx \sigma_{pr}$

En adoptant les contraintes maximales admissibles, la méthode de dimensionnement des éléments en béton armé pour le cisaillement d'après les indications de MÖRSCH assurait la résistance contre les contraintes de compression principales, inclinées, σ_2. Cette condition impose la valeur limite $|\sigma_2| = |\sigma'| \approx 0{,}1\sigma_{pr}$ dans le cas des étriers inclinés à 45° et la valeur $|\sigma_2| = |2\sigma'| \approx 0{,}2\sigma_{pr}$ pour des étriers verticaux. Par conséquent, dans le dimensionnement actuel le type de rupture en question ne se manifeste pas, et c'est sans doute pourquoi les prescriptions dans les règlements ne concernent pas ce problème.

5.2. INFLUENCE DES DIMENSIONS DE LA POUTRE SUR LES RÉSULTATS DES ESSAIS (EFFET D'ÉCHELLE)

On a mentionné au sous-chapitre 4.1 que l'influence des dimensions de la poutre sur l'effort transversal de rupture a été étudiée par BORICHANSKI sur des poutres rectangulaires de

hauteur variable de 10, 20, 30, 45 et 60 cm et avec le rapport entre la hauteur et la largeur de la section transversale égal à $\frac{h_t}{b} = 1{,}5$. D'après ces essais, Borichanski a constaté que la valeur réduite $\frac{V_b \cot\alpha}{bh\bar{\sigma}_b}$ (où α désigne l'angle de la fissure oblique par rapport à l'axe de la poutre) augmente rapidement pour $h_t < 30$ cm ; par contre, dans les poutres où la hauteur de la section h_t dépasse 30 cm, l'augmentation des dimensions reste sans influence sur cette valeur (fig. 5-7).

Le même problème a été examiné par RÜSCH, HAUGLI et MAYER [72]. De plus, ils ont considéré la question de la dispersion des efforts de rupture. La dispersion, analysée en

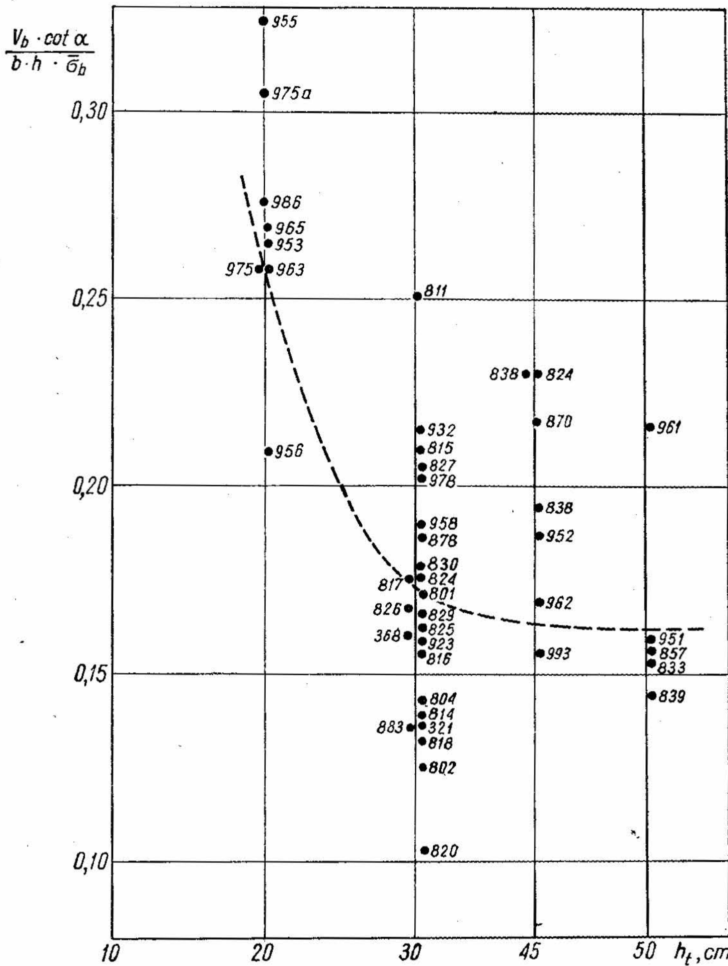


Fig. 5-7. Influence de la hauteur h_t de la poutre sur la valeur de $\frac{V_b \cot\alpha}{bh\bar{\sigma}_b}$ d'après BORICHANSKI [11]

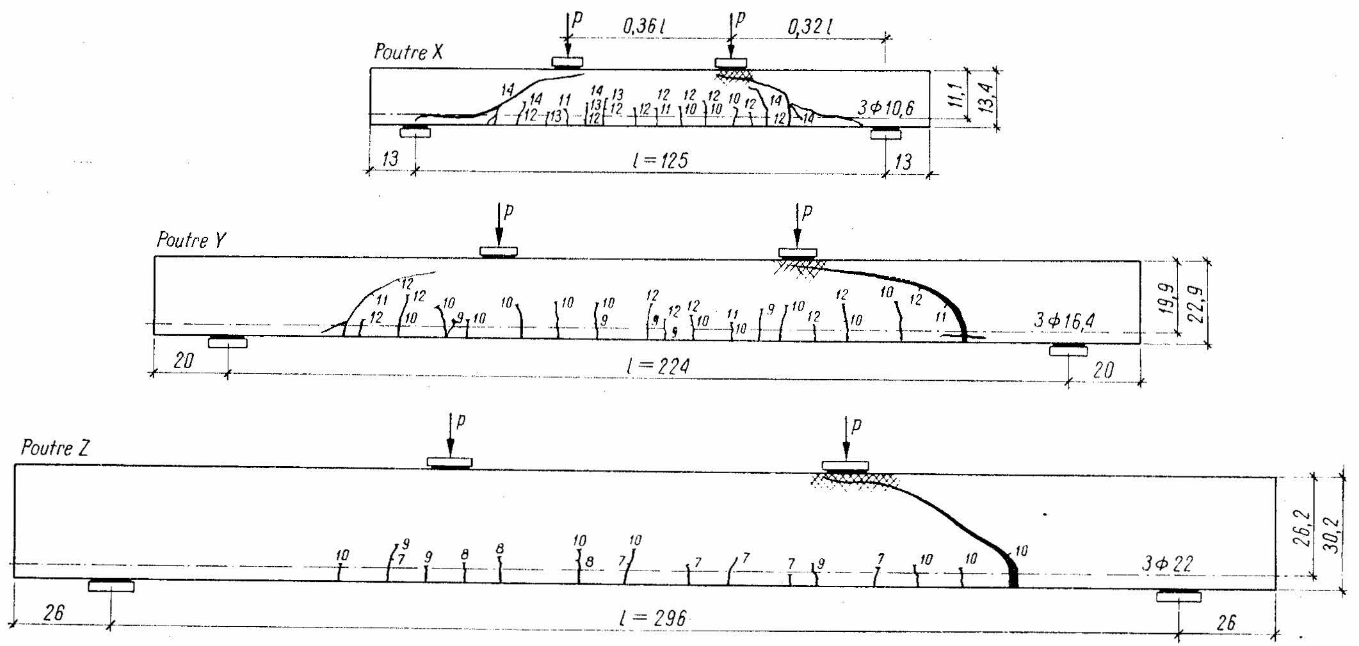


Fig. 5-8. Influence des dimensions absolues d'une poutre sur la morphologie des fissures, d'après les essais de RÜSCH, HAUGLI, MAYER [72]

TABLEAU 5-1

Poutre	Résistance du béton σ_{wu} kgf/cm²	Dimensions des poutres			P_u	M_u*)	Moments réduits		
		h cm	b cm	l cm	tf	tfm	$m_{cu(k)}$	m_{cu}**)	m_u^0
X	283	11,1	9	125	1,49	0,60	0,19	0,224	0,377
Y	283	19,9	12	224	3,07	2,21	0,164	0,193	0,365
Z	298	26,2	18	296	5,58	5,30	0,144	0,169	0,355

*) Les valeurs de M_u correspondaient à la rupture du béton au-dessus de l'extrémité de la fissure oblique.

**) On a admis ici $\sigma_{pr} = 0,85\ \sigma_{wu}$.

utilisant la valeur du moment de rupture réduit relatif à la résistance, a été constatée comme très petite. Dans le cas extrême, le coefficient de variation était égal à 6,6 % seulement, cette valeur étant très petite, même dans les essais réalisés en laboratoire.

Les essais [72] ont été effectués sur des poutres simplement appuyées, de trois sections transversales différentes et de travées convenablement choisies. Les poutres de la série *I* (préliminaire) ont été chargées par deux forces concentrées situées à 0,32 l des appuis. Les poutres de la série *II* ont été soumises à une charge uniformément répartie. La figure 5-8 représente la fissuration des poutres *X*, *Y*, *Z* de la série *I*. Les résultats caractéristiques des essais sont donnés dans le tableau 5-1.

D'après les résultats des essais [72] on peut conclure que, conformément à l'opinion de BORICHANSKI, le moment de rupture réduit ou l'effort transversal réduit, diminuent avec l'augmentation des dimensions absolues de la poutre. Mais le moment de rupture ne diminue plus quand une certaine dimension critique de la section transversale est dépassée. Des essais [72] il découle que cette valeur critique dépend de la nature de la charge appliquée à la poutre. Pour une charge uniformément répartie, la section critique est caractérisée par la hauteur $h = 20$ cm d'après RÜSCH ; par contre, pour une charge concentrée cette hauteur est égale à $h = 30$ à 40 cm (fig. 5-9). Cette dernière valeur n'a pas été déterminée d'une façon exacte, car les essais effectués ne comportaient pas de telles poutres.

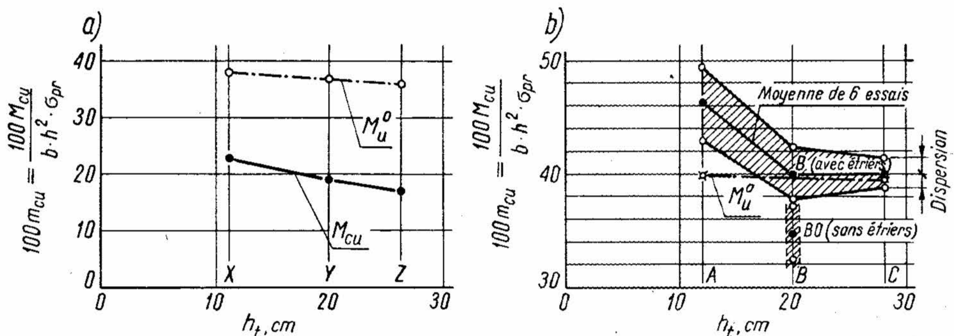


Fig. 5-9. Influence des dimensions d'une poutre sur le moment réduit de cisaillement d'après les essais [72] : a) résultats de la série I des essais (charge des poutres *X*, *Y*, *Z* par des forces concentrées), b) résultats de la série II des essais des poutres *A*, *B*, *C* sous une charge uniformément répartie

Les essais [72] ont montré également que les dimensions absolues de la poutre influencent la répartition des fissures. Par exemple, dans les poutres de la série *I* (sans armatures transversales) les premières fissures dues à la flexion s'étaient ouvertes sous l'action du moment $M = 0{,}35\, M_u^o$. Dans les trois autres poutres, *X*, *Y*, *Z*, dans la zone de cisaillement il n'y avait qu'une fissure oblique (fig. 5-8), développée à partir d'une fissure primitive de flexion. Dans la poutre *X*, dont la section transversale était la plus petite, la charge appliquée après l'ouverture d'une fissure oblique —charge nécessaire pour provoquer la rupture —était relativement beaucoup plus importante que dans la poutre *Y*. Dans la poutre *Z* (la plus

grande) l'apparition d'une fissure oblique correspondait à l'épuisement presque immédiat de la capacité portante. Peu avant la rupture de la poutre *X*, une fissure horizontale se manifestait au niveau des armatures principales, à partir de la fissure oblique jusqu'à la zone d'appui. Une fissure de même nature était beaucoup plus courte dans la poutre *Y* (fig. 5-8); dans la poutre *Z* elle n'avait guère apparu.

L'influence de la variation de hauteur de la poutre sur le comportement de la zone d'appui sous une charge uniformément répartie a été étudiée par RÜSCH, HAUGLI et MAYER sur les poutres des séries *A*, *B*, *C* et *BO*. La charge uniformément répartie a été remplacée par dix forces dont l'application est indiquée par la figure 5-10. Chaque série était composée de six poutres identiques. Les poutres des séries *A*, *B* et *C* étaient armées d'étriers de Ø 2,4 mm, avec espacement uniforme $t = 9{,}0$ cm sur toute la longueur de la poutre. Dans les séries *A*, *B* et *C* les hauteurs utiles des sections et les travées ont été choisies de telle manière que leur rapports soient 3 : 5 : 7 ($h_A = 12$ cm, $h_B = 20$ cm, $h_C \doteq 28$ cm). Dans toutes les séries, la largeur d'une poutre ($b = 10$ cm), la qualité du béton, le pourcentage de l'armature longitudinale $\overline{\omega}$ et de l'armature transversale $\overline{\omega}_v$ étaient identiques. La seule différence entre les six poutres de la série *BO* et de la série *B* était l'absence d'armature transversale dans la première série. Les résultats des essais sont présentés ci-dessous.

Série A

Dans les six poutres de la série *A* ($h = 12$ cm) la fissure oblique principale (Hauptschrägriss) se développait à partir d'une fissure extrême due à la flexion. Les fissures voisines n'étaient que légèrement déviées vers le centre de la travée. Sous l'action du moment $M = 0{,}45\ M_u^o$, au niveau de l'armature principale, des fissures de même nature que celles des poutres *X*, *Y*, *Z* ont apparu; ces fissures peuvent être appelées secondaires (Verdübelungsrisse), voir la figure 5-10. Sous la charge correspondant au moment $M = 0{,}85\ M_u^o$,

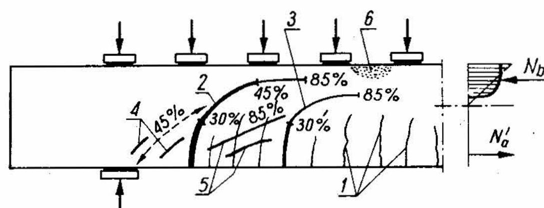


Fig. 5-10. Schéma de fissuration dans la zone de cisaillement des poutres *A*, *B*, *C* de la série *II* soumises à une charge uniformément répartie [72]

1 — fissures dues à la flexion, 2 — fissure oblique principale, 3 — deuxième fissure oblique principale, 4 — fissures secondaires (Verdübelungsrisse), 5 — fissures, 6 — zone d'écrasement du béton

la deuxième fissure oblique principale se développait à partir d'une des fissures dues à la flexion, située un peu plus loin de l'appui. Simultanément, entre ces deux fissures, d'autres fissures secondaires se sont ouvertes, l'une à côté de l'autre. Ces fissures étaient indépendantes des fissures précédentes dues à la flexion (fig. 5-10). L'épuisement de la capacité portante des poutres de la série *A* a été causé par la rupture du béton sur le bord supérieur

entre les platines de chargement. La distance entre la section de rupture et l'appui était égale à 0,39 l. Le moment effectif de rupture était de 15 % supérieur au moment calculé M_u^o.

Série B

La fissuration des poutres de cette série n'a pas été si homogène que dans la série précédente. Dans certaines poutres on a rencontré des fissures obliques principales et des fissures secondaires, mais dans les autres il y avait de nombreuses fissures dirigées suivant les lignes de force des contraintes principales. Dans certaines poutres, on n'a pas retrouvé de fissures secondaires. La rupture des poutres était provoquée par le béton, et la section de rupture était située également à 0,39 l de l'appui.

Série C

La fissuration des poutres de la série C ressemblait à celle des séries A et B. Dans tous les cas, l'épuisement de la capacité portante était dû à la rupture du béton dans la zone comprimée entre les platines de chargement. Dans trois poutres, la section de rupture était située comme dans les séries A et B à 0,39 l de l'appui; mais dans les trois autres poutres cette distance était de 0,28 l, sans que cela ait influé sur la valeur du moment de rupture. Pour les poutres de la série C le moment effectif de rupture était égal à M_u^o.

Série BO

Les fissures dues à la flexion et les premières fissures obliques s'étaient ouvertes sous des charges de même ordre que dans les poutres armées par des étriers. Mais l'ouverture des fissures augmentait plus rapidement en fonction de la charge, et pour 0,65 M_{cu}^o les fissures obliques principales dans la série BO se caractérisaient par la même ouverture que dans les poutres avec étriers, sous la charge correspondant à 0,85 M_u^o.

Dans toutes les poutres de la série BO il n'y avait qu'une seule fissure oblique principale au voisinage de l'appui, et les fissures secondaires étaient peu nombreuses. Ce qui était caractéristique de la série BO : la fissure oblique principale était plus inclinée que dans les poutres munies d'étriers. L'épuisement de la capacité portante correspondait au moment $M_{cu} = 0{,}87\, M_u^o$. La section de rupture était située dans trois des poutres à 0,39 l de l'appui, dans deux autres à 0,28 l et dans une dernière à 0,33 l.

D'après la figure 5-9a on voit que dans les poutres X, Y et Z, chargées par deux forces concentrées, le moment réduit de rupture (bezagene Bruchmoment) diminue lorsque la hauteur de la poutre augmente. La variation de la hauteur des poutres n'était pas suffisante pour déterminer expérimentalement la hauteur critique, dont le dépassement correspondrait à

$$\frac{M_{cu}}{bh^2\sigma_{pr}} = C^{te}.$$

Sur la base des essais de C. Forssell (Stockholm, 1954) on peut supposer que h_{crit}, dans le cas d'une poutre chargée par deux forces concentrées, est égale à 40 cm environ, donc qu'elle est située en dehors des essais du programme [72].

L'effet d'échelle a été également étudié par Leonhardt et Walther [51]. Ces essais portaient sur deux séries de poutres D et C dont le rapport $l : h = 100 : 15 = 6{,}7$ était

le même. Pour l'armature on a utilisé l'acier Torstahl StIIIb de $Q'_{a0,2} = 4400$ kgf/cm² et de $\sigma'_a = 5500$ kgf/cm². Chaque série était composée de quatre poutres, et les rapports de leurs dimensions étaient 1 : 2 : 3 : 4.

Les poutres de la série D étaient armées par deux barres, le pourcentage de l'armature restant constant ($\overline{\omega} = 1{,}65$ %).

Dans les poutres de la série C le pourcentage de l'armature était également constant, $\overline{\omega} = 1{,}33$ %, et on a employé des barres de même diamètre Ø 16 mm. Par suite, dans les poutres C_1, C_2, C_3 et C_4 les nombres de barres étaient: 1, 3, 6 et 9 avec des largeurs de poutres variables suivant les rapports 1: 1,5: 2: 2,25.

La résistance moyenne du béton des deux séries, contrôlée sur des éprouvettes de dimensions variables et ramenée au σ_{wu20} était égale à 400 kgf/cm² environ.

La disposition des fissures est représentée pour les poutres de la série D et C par les figures 5-11 et 5-12, respectivement. De la figure 5-11 on voit que la répartition et le nombre des fissures étaient pareils dans toutes les poutres de la série D.

D'après RÜSCH [74] l'espacement des fissures dépend du coefficient

$$\varrho = \frac{\sum p_a}{A_b} = \pi \frac{\sum \Phi}{A_b}, \tag{5.1}$$

et pour ϱ constant l'espacement doit être le même dans les poutres de dimensions différentes.

Cette supposition n'a pas été entièrement confirmée par les essais de LEONHARDT et WALTHER [51]. Ils ont constaté, néanmoins, qu'en conservant la même adhérence de l'acier au béton (série C, fig. 5-12) l'espacement des fissures n'est pas proportionnel aux dimensions des poutres, mais qu'il dépend principalement du coefficient ϱ.

Par contre, dans les poutres de la série D (fig. 5-11), l'espacement des fissures était approximativement proportionnel aux dimensions des poutres. En conséquence, dans les poutres plus grandes les fissures étaient plus larges, et il était possible de les observer plus tôt. Si l'on néglige ce phénomène, le moment réduit de fissuration observé dans les poutres plus petites diminue. D'autre part, dans les poutres plus grandes les contraintes dues au retrait sont plus importantes et il s'ensuit que la résistance σ' du béton est plus petite et facilite la fissuration.

Conformément au programme d'essai, toutes les poutres des deux séries [51] se sont rompues par cisaillement. Peu avant la rupture il se produisait une fissure horizontale au niveau des armatures principales, allant du commencement de la fissure oblique jusqu'à l'extrémité de la poutre. D'après les essais on a constaté que dans la série D le moment réduit de rupture par cisaillement

$$m_{cu(k)} = \frac{M_{cu}}{bh^2 \sigma_{wu}} \tag{5.2}$$

diminuait avec l'augmentation des dimensions de la poutre. Pour la plus petite poutre, D_1, il était égal à $m_{cu(k)} = 0{,}142$ et pour la plus grande poutre, D_4, $m_{cu(k)} = 0{,}094$. Ce phénomène peut être expliqué par la diminution de l'adhérence de l'acier au béton avec l'augmentation des dimensions de la poutre quand le nombre des barres est constant, car

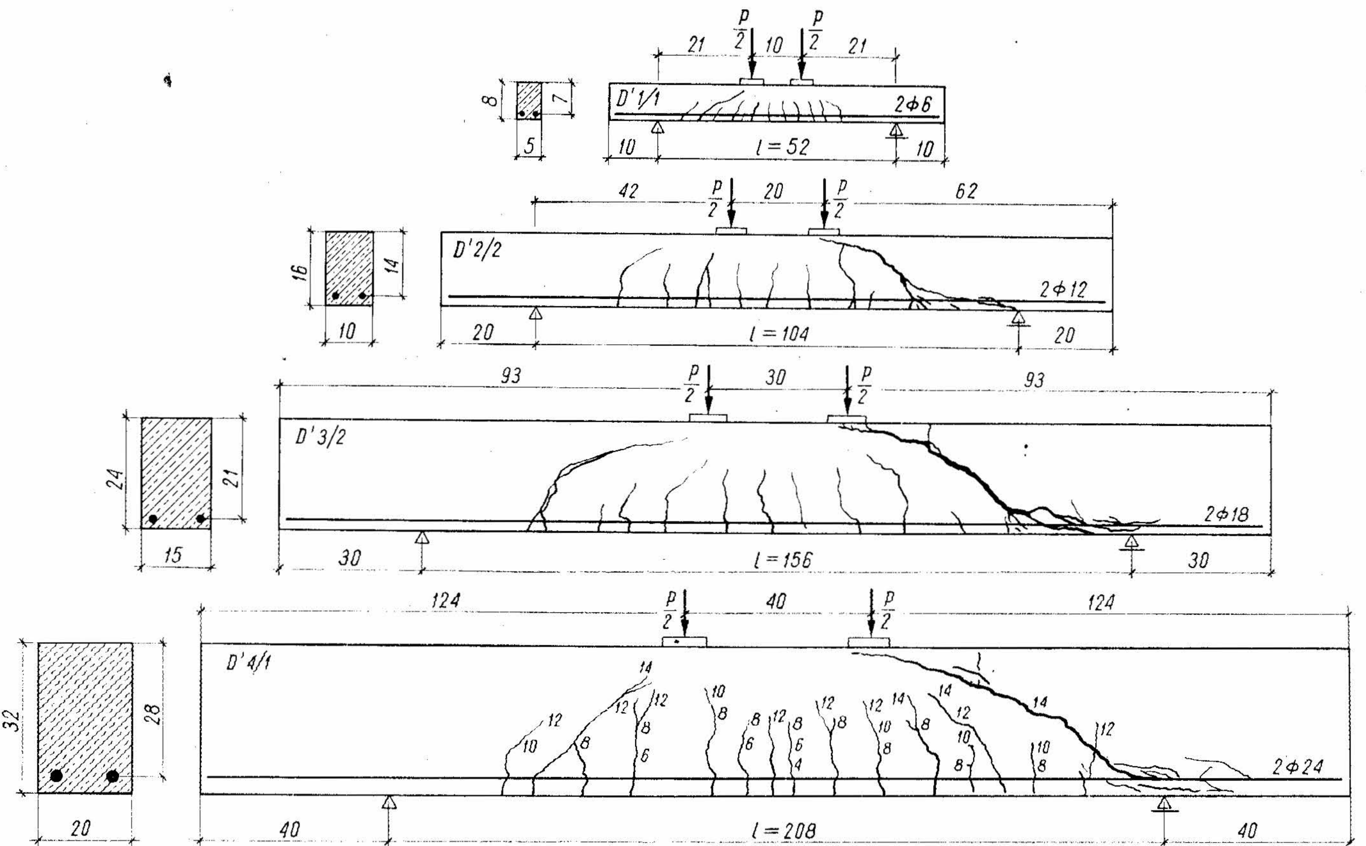


Fig. 5-11. Influence des dimensions des poutres sur la morphologie des fissures dans la zone de cisaillement avec $\bar{\omega} = C^{te}$ et avec un nombre invariable d'armatures, essais de LEONHARDT et WALTHER [51] ; série des poutres D_1, D_2, D_3, D_4

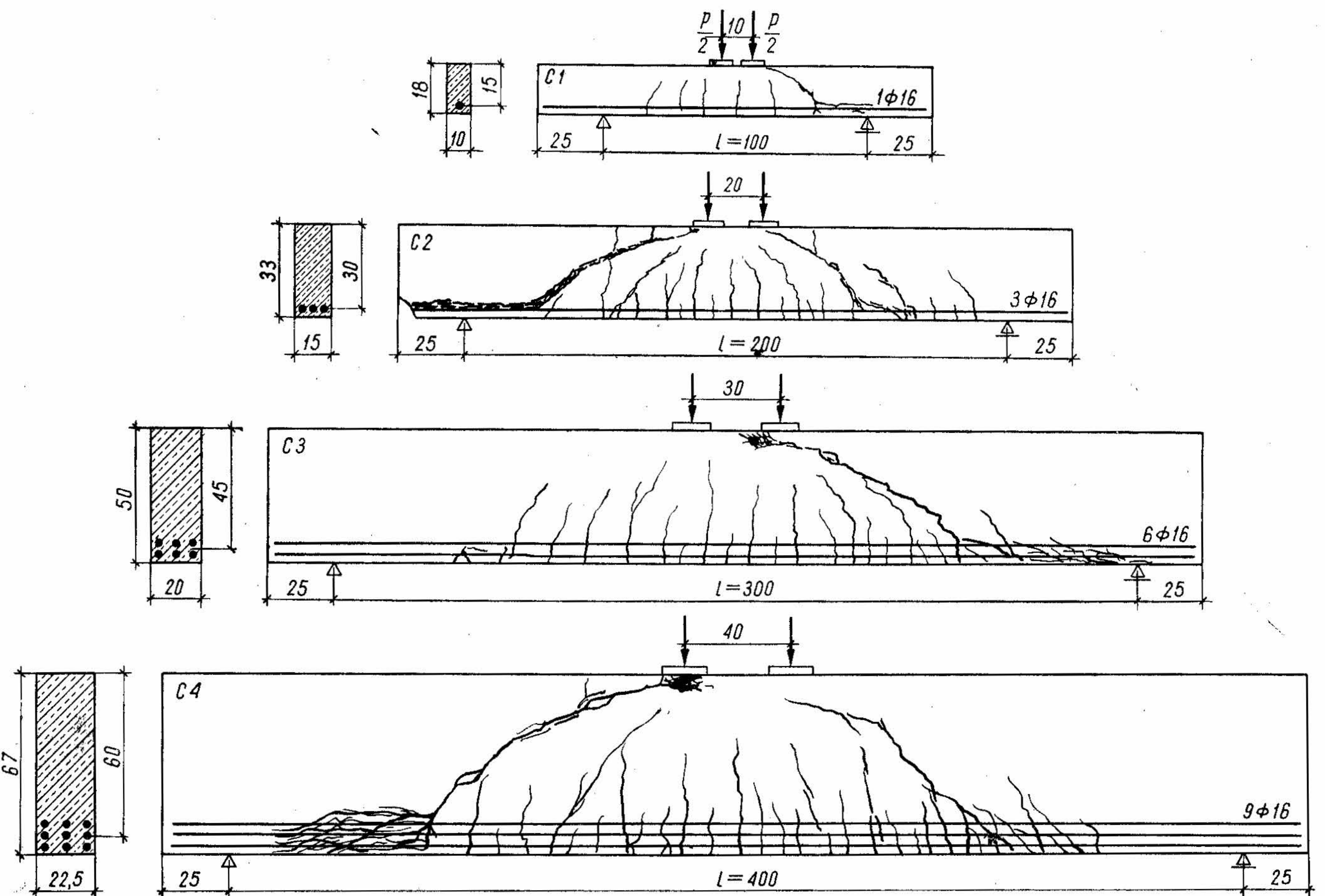


Fig. 5-12. Influence des dimensions des poutres sur la morphologie des fissures dans la zone de cisaillement, avec $\overline{\omega} = C^{te}$ et diamètre constant des armatures, essais [51] ; série des poutres C_1, C_2, C_3, C_4

dans ce cas les fissures pénètrent plus profondément dans la zone comprimée et accélèrent la rupture. La relation entre m_{cu} et la hauteur utile h de la poutre est représentée sur la figure 5-13.

On pourrait supposer que le moment réduit de rupture par cisaillement m_{cu} était constant dans les poutres de la série C, pour lesquelles le diamètre des armatures était constant. Cependant, deux poutres plus petites C_1 et C_2 présentaient effectivement des moments m_{cu} identiques et égaux à 0,95 environ, mais les moments des poutres C_3 et C_4, aussi identiques, étaient égaux à 0,75, donc inférieurs de 20 % par rapport aux précédents. D'après leurs essais LEONHARDT et WALTHER ont conclu que les résultats des essais des poutres soumises au cisaillement ne peuvent être exploités pour l'analyse des éléments en béton armé plus importants que dans le cas où la hauteur utile est $h > > 25$ cm et les coefficients ϱ et $\overline{\omega}$ sont les mêmes pour la poutre essayée et l'élément analysé.

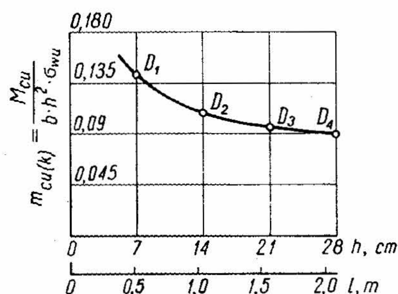


Fig. 5-13. Influence de la hauteur utile h de la poutre sur la valeur du moment de cisaillement ultime réduit $m_{cu(k)} = = \frac{M_{cu}}{bh^2\sigma_{wu}}$, essais [51]; série des poutres D_1, D_2, D_3, D_4

Une des plus récentes études expérimentales relatives à l'influence des dimensions de la poutre sur la résistance au cisaillement est la thèse de N.S. BHAL [9], préparée sous la direction de F. LEONHARDT à l'Institut Otto Graf à Stuttgart. Après avoir constaté que les essais précédents avaient été effectués sur des poutres de hauteur trop petite, BHAL a adopté des poutres d'essai dont la hauteur minimale était $h = 30$ cm et la hauteur maximale $h = 120$ cm. Dans sa série de quatre poutres les rapports entre les dimensions fondamentales: hauteur utile, portée et espacement des forces de chargement, étaient 1: 2: 3: 4. La largeur des poutres était constante et égale à $b = 24$ cm. On peut donc admettre que dans les essais de BHAL la loi de la similitude plane (en allemand, ebene Ähnlichkeit ; en anglais, distorted similitude) était satisfaite. Pour obtenir les mêmes contraintes et déformations dans le modèle et dans l'élément, conformément à la loi de la similitude plane, il faut diminuer la charge du modèle en la divisant par λ, λ étant ici un coefficient d'échelle suivant la longueur et la hauteur. Les flèches du modèle seront également réduites dans le rapport λ, tandis que les moments le seront dans le rapport λ^2.

Pour obtenir l'espacement constant des fissures BHAL a supposé $\overline{\omega} = C^{te} = 1{,}26$ % et les barres de même diamètre, Ø 24 mm. Les poutres essayées par BHAL sont représentées sur la figure 5-14.

Les contraintes dans les armatures en milieu de travée, dans les poutres B_1 à B_4, sont indiquées sur la figure 5-15. Ces contraintes ont été calculées d'après les déformations mesurées par un extensomètre mécanique sur une base de 200 mm et rapportées sur l'échelle de similitude (im Ähnlichkeitsmassstab).

De la figure 5-15 on voit que les contraintes maximales dans les armatures des poutres dont les dimensions sont variables ne diffèrent que très peu. BHAL explique ces différences par le fait que dans les poutres hautes les espacements entre les armatures étaient moindres

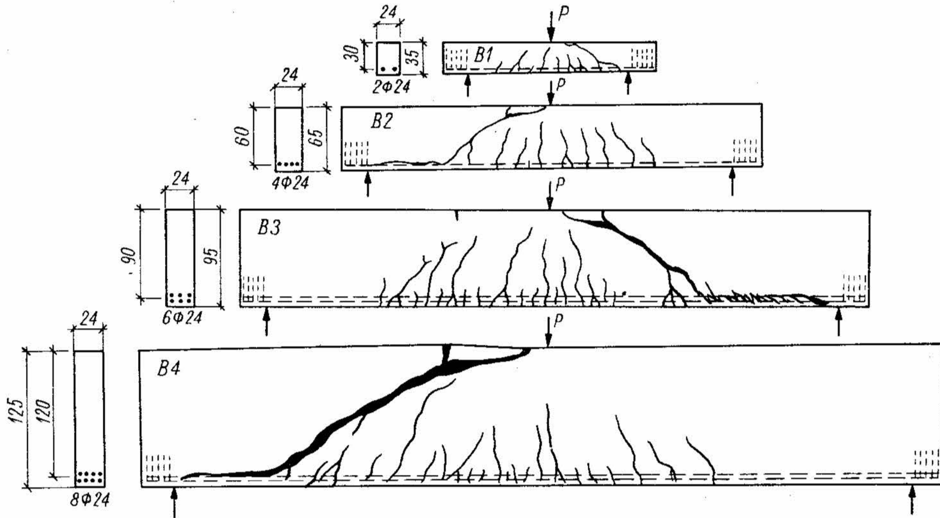


Fig. 5-14. Fissuration des poutres B_1 à B_4 en état d'épuisement de la capacité portante

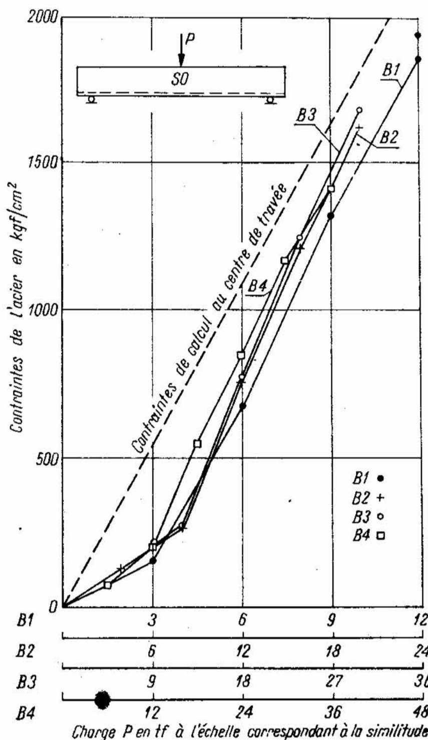


Fig. 5-15. Contraintes de l'armature principale au centre de travée des poutres B_1 à B_4 en fonction de la charge P

dans la zone tendue, ce qui influençait les contraintes de l'acier et la répartition des fissures. Par exemple, sur le bord inférieur des poutres hautes il y avait plus de fissures sur le segment de la base de mesure de 20 cm, mais leurs ouvertures étaient moins importantes que dans les poutres moins hautes où les barres étaient moins nombreuses. La figure 5-14 représente la fissuration des poutres ; son examen permet de conclure que dans les poutres très hautes B_3 et B_4 ($h = 90$ cm et $h = 120$ cm) la répartition des fissures était différente de celle dans les poutres plus basses B_1 et B_2, dont les hauteurs utiles étaient respectivement 30 cm et 60 cm. Dans les poutres B_3 et B_4, entre les fissures dues à la flexion et atteignant l'axe neutre on observe des fissures courtes secondaires (sekundären Biegerisse). Ces fissures s'étaient stabilisées peu après leur ouverture et l'augmentation de la charge n'a pas produit leur cheminement. Les fissures obliques se sont développées à partir des fissures extrêmes dues à la flexion, l'ouverture de ces fissures changeant d'une façon fondamentale le comportement d'une poutre. Les fissures dues à la flexion au centre de la travée ne se prolongeaient plus et les déformations ultérieures de la poutre jusqu'à la rupture se

concentraient au-dessus de la fissure oblique. Les essais ont permis de constater que l'espacement des fissures au niveau des armatures principales ne variait pas en fonction de la hauteur de la poutre ; par contre, au niveau de l'axe neutre, l'espacement des fissures augmentait avec la hauteur de la poutre. L'ouverture moyenne des fissures est représentée sur les figures 5-16 et 5-17 comme la fonction de la hauteur réduite de la poutre. Les me-

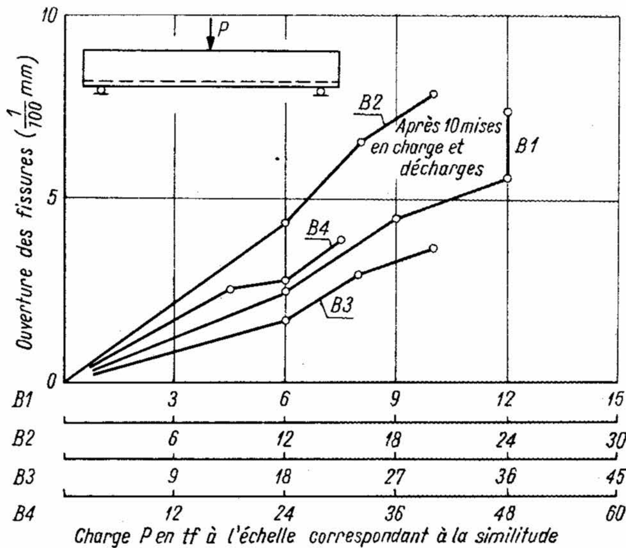


Fig. 5-16. Ouvertures moyennes des fissures au niveau de l'armature principale

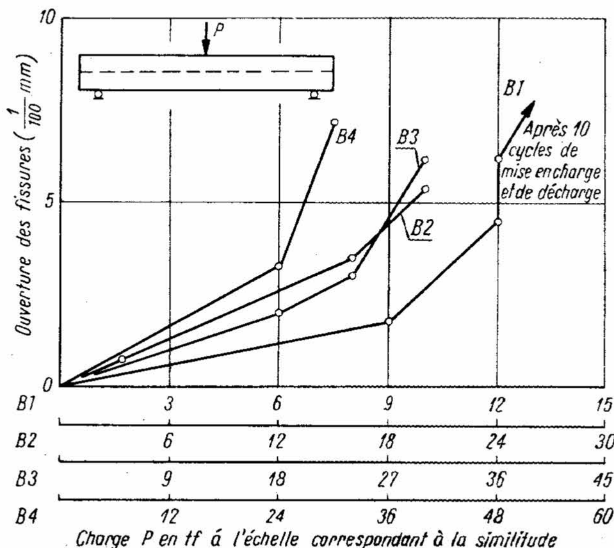


Fig. 5-17. Ouvertures moyennes des fissures à mi-hauteur des poutres

sures des ouvertures des fissures ont montré que la formule de Rüsch pour l'ouverture moyenne

$$f_{moyenne} = l_f \cdot \varepsilon'_a$$

n'a pas fourni des valeurs suffisamment approchées des résultats expérimentaux de Bhal. Les dispersions des ouvertures de fissures au niveau des armatures principales sont causées par le fait que dans les poutres très hautes la quantité d'acier dans la zone tendue, rapportée à la surface du béton située à son voisinage immédiat, était beaucoup plus grande. Par conséquent, il y avait plus de fissures dont les ouvertures étaient moins importantes. D'autre part, dans les poutres moins hautes vu le nombre plus réduit de barres, l'enrobage par le béton était meilleur, d'où l'effet inverse — l'augmentation de l'ouverture des fissures. L'ouverture des fissures mesurée à mi-hauteur de la poutre est beaucoup moins influencée par l'armature principale, et d'autant moins que la poutre est plus haute. C'est une explication probable du fait qu'à mi-hauteur l'ouverture des fissures dans les poutres plus hautes était généralement plus grande que dans les poutres moins hautes, donc à l'inverse de celle des fissures au niveau des armatures principales. Le moment réduit de rupture diminuait avec l'augmentation de la hauteur des poutres (fig. 5-18). Dans les essais de Bhal, seule la plus petite poutre B_1 a atteint la charge de service calculée à la flexion. Les autres poutres s'étaient rompues par cisaillement avant la charge de service calculée. La rupture de toutes les poutres était brutale, immédiatement après l'ouverture de la fissure oblique principale.

La figure 5-18 nous montre que dans les poutres sans armature transversale ce n'est qu'à partir de la hauteur $h = 60$ cm que le moment réduit de rupture par cisaillement devient presque indépendant des dimensions des poutres. Par l'analyse des résultats de 15 essais effectués aux Etats-Unis, en Allemagne, en Angleterre et en Suède et comportant 326 poutres Bhal est arrivé à la conclusion que la contrainte τ_{fu1} correspondant à la limite de la capacité portante dans les poutres sans étriers était un produit de quatre fonctions :

$$\tau_{fu1} = f_1(\sigma_{wu}) \cdot f_2(\overline{\omega}) \cdot f_3\left(\frac{a}{h}\right) \cdot f_4(h). \tag{5.3}$$

Les fonctions inconnues dans l'équation (5.3) ont été déterminées par la méthode des approximations successives de Chang et Kesler (ACI — Journal, Juin 1958) en exploitant les résultats obtenus par lesdits essais des 326 poutres. La formule définitive de Bhal pour la détermination des contraintes de cisaillement τ_{fu1} correspondant à l'ouverture de la première fissure oblique principale a la forme :

$$\tau_{fu1} = 1{,}3\,(1+0{,}0132\sigma_{wu})\,(1+12{,}25\overline{\omega})\left(1-0{,}0172\frac{a}{h}\right)(1+3e^{-0{,}059h}). \tag{5.4}$$

Les contraintes données par la formule (5.4) pour les poutres sans armature transversale correspondent aux contraintes de cisaillement à la limite de la capacité portante ; elle sont exprimées en kgf/cm^2.

Bhal a examiné également l'influence de la variation de la hauteur sur la résistance au cisaillement des poutres armées par des étriers verticaux. Dans ce but, on a construit

quatre poutres identiques à celles représentées sur la figure 5-14, mais avec des étriers Ø 8 mm, en acier St III b, espacés de 16 cm. On a obtenu ainsi la sécurité constante contre le cisaillement (Schubbewehrungsgrad)

$$\bar{\omega}_v = \frac{0{,}5 \cdot 2}{24 \cdot 16} = 0{,}0015 .$$

Avec une armature contre le cisaillement relativement faible et égale à peine à 30 %, d'après MÖRSCH, dans des poutres de hauteur $h = 30$ cm et 60 cm, on a constaté une résistance presque complète à la flexion. La rupture a eu lieu (Schubbiegebruch) après l'ouverture d'une fissure oblique profonde dans la zone comprimée du béton, ce qui a produit la destruction du béton dans la région voisine de l'extrémité de la fissure oblique. Pour les poutres de hauteur utile $h = 90$ cm et 120 cm, l'effondrement se manifestait après la rupture des étriers traversant la fissure oblique principale. Les contraintes de cisaillement apparues après la limite de la capacité portante étaient du même ordre de grandeur pour les quatre poutres. Cela signifie que dans les poutres munies d'une armature transversale la hauteur de la poutre influence la capacité portante dans une mesure très petite et négligeable.

Les mesures des déformations dans les étriers ont montré que, la similitude géométrique plane étant respectée, les contraintes dans les étriers dépendent néanmoins de la hauteur h.

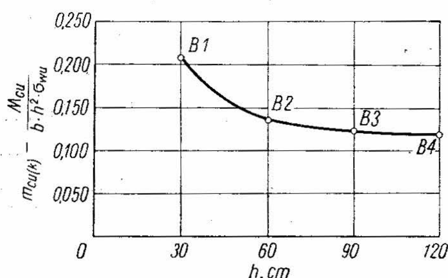


Fig. 5-18. Influence de la hauteur utile sur la valeur du moment de cisaillement ultime réduit $m_{cu(k)}$ d'après les essais de BHAL

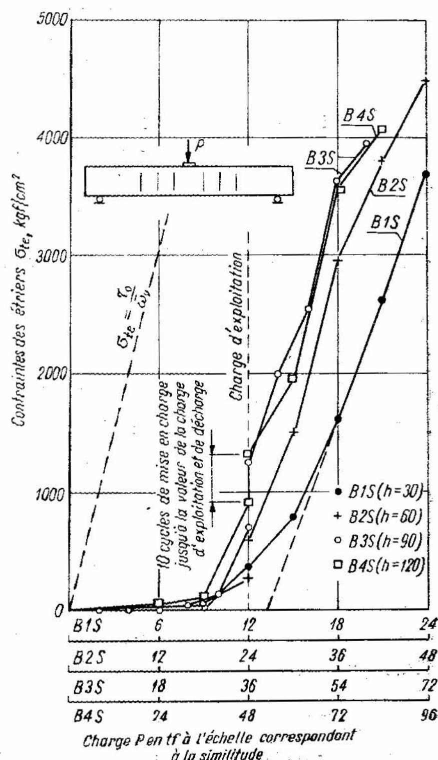


Fig. 5-19. Contraintes maximales des étriers en fonction de la charge P

La figure 5-19 nous enseigne que ces contraintes diminuent lorsque la hauteur h augmente. La ligne discontinue du diagramme concerne les contraintes déterminées par la théorie :

$$\sigma_{te}^{0} = \frac{\tau_0}{\overline{\omega}_v}.$$

Jusquà l'ouverture des fissures obliques les contraintes effectives dans les étriers sont proches de zéro. Après l'ouverture des fissures obliques, les diagrammes des contraintes dans les étriers commencent à s'élever, conformément à l'analogie avec les treillis. Par conséquent, les diagrammes des contraintes effectives sont déplacés vers la droite, mais ils restent presque exactement parallèles à la droite

$$\sigma_{te}^{0} = \frac{\tau_0}{\overline{\omega}_v}.$$

BHAL a constaté que la contrainte de cisaillement correspondant à l'ouverture de la première fissure oblique est du même ordre de grandeur dans les poutres armées d'étriers que dans les poutres dépourvues d'étriers. En conséquence, pour le calcul de τ_{fu1} dans les poutres avec une armature transversale on peut utiliser la formule (5.4).

5.3. INFLUENCE DE LA NATURE DE L'ARMATURE TRANSVERSALE DANS LES POUTRES EN BÉTON ARMÉ SUR LEUR CAPACITÉ PORTANTE, LEUR FLÈCHE ET LA RÉPARTITION DES FISSURES

5.3.1. ESSAIS DE BACH ET GRAF

Des essais concernant le cisaillement dans les poutres en béton armé ont été effectués à grande échelle par BACH et GRAF à Stuttgart de 1911 à 1928. Le but des essais était d'obtenir des indications sur l'efficacité de l'armature par barres relevées et par étriers. Les résultats de ces essais ont été publiés dans les cahiers de DAfE[1] : 10/1911, 12/1911, 20/1912, 48/1921, 58/1928 et 67/1931.

Les essais ont été réalisés sur des poutres à une travée, en forme de T, armées par des barres longitudinales et par des étriers différemment répartis. On a examiné également des poutres avec des barres relevées de disposition variable. Les poutres étaient soumises à deux forces symétriques concentrées ou à une charge uniformément répartie. L'armature principale suffisamment puissante a été prévue pour que la rupture ne se manifeste pas dans la section M_{max} mais dans la zone de l'action simultanée du moment fléchissant et de l'effort tranchant. Le béton était composé de ciment, de sable du Rhin et de gravier du Rhin dans les proportions 1: 2: 3, l'eau correspondait à 9 % du poids. L'armature des poutres a été exécutée en acier rond BStI[2] de limite élastique égale à 3000 kgf/cm². Avant les essais, les poutres ont été conservées pendant 45 jours dans le laboratoire dans une ambiance humide. La résistance du béton après 45 jours sur prismes 20×20×20 cm était égale à 250 kgf/cm², essais DAfE, cahier 10 [1].

[1] DAfE — Deutscher Ausschuss für Eisenbeton.
[2] BStI — acier rond et lisse, à limite nette d'élasticité, d'après DIN.

La figure 5-20 représente quelques-unes des 23 poutres examinées, leur armature et la nature de la charge.

L'épaisseur et la largeur du hourdis étaient les mêmes, mais la largeur de la nervure était variable (15, 20 et 30 cm), ainsi que le nombre et la section des étriers. Dans la plupart des poutres la limite de la capacité portante était due au glissement des armatures principales. Etant donné que les barres étaient munies de crochets, les glissements entraînaient généralement les fissures sur la face frontale de la poutre (fig. 5-21). Seulement dans les cinq poutres armées fortement par des étriers on n'a pas constaté de glissements dans l'ancrage, et la rupture de la poutre a été produite par l'écoulement de l'acier dans les étriers traversés par la fissure oblique. Sur la figure 5-23 on a montré, comme exemple, la fissuration des poutres Nos 444 et 487. La première, appartenant à la série 7, n'était armée que par des barres longitudinales principales (2 Ø 40 mm), la seconde, de la série 17, avait de plus dans des zones de cisaillement d'un mètre de longueur des étriers Ø 5 mm tous les 10 cm. La rupture de la poutre No 444 sans étriers s'est produite sous la charge $P_u = 24{,}7$ tf

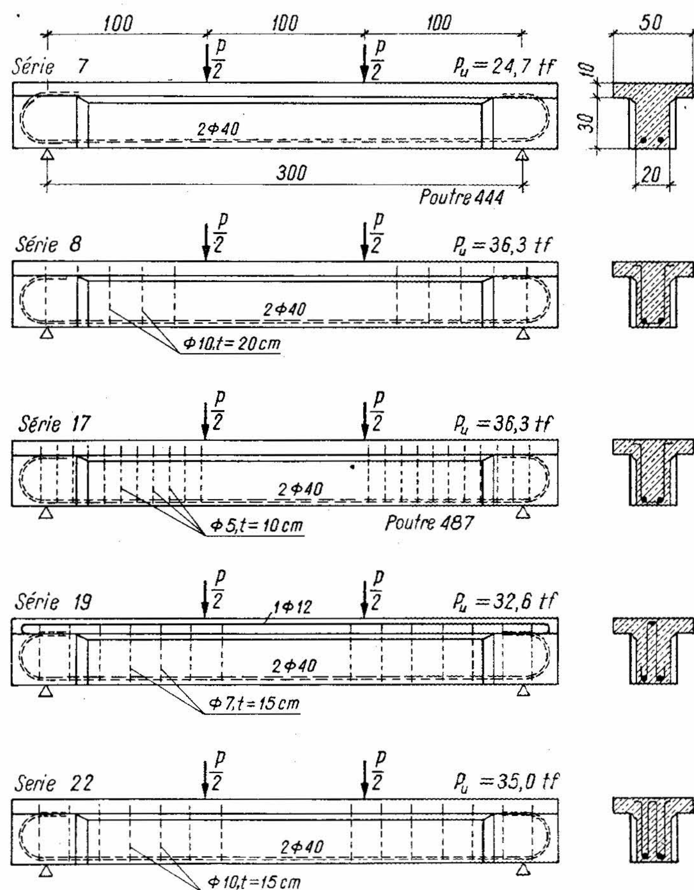


Fig. 5-20. Poutres des essais DAfE, cahier 10 [1]

et le glissement des armatures a été observé sous la charge $P_u = 22$ tf. Le peu d'acier ajouté dans la poutre No 487, augmentant la masse totale de l'armature de 80,6 kg à 87,5 kg (moins de 10 %), a causé un accroissement de la force de rupture de 11,6 tf (40 % environ), donc de $P_u = 24,7$ tf à $P_u = 36,3$ tf.

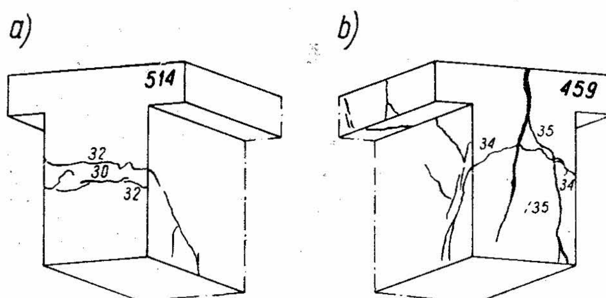


Fig. 5-21. Fissures sur les faces frontales des poutres dans les essais [63] : a) poutres avec des barres munies de crochets pliés à 90°, b) poutres avec des barres munies de crochets circulaires

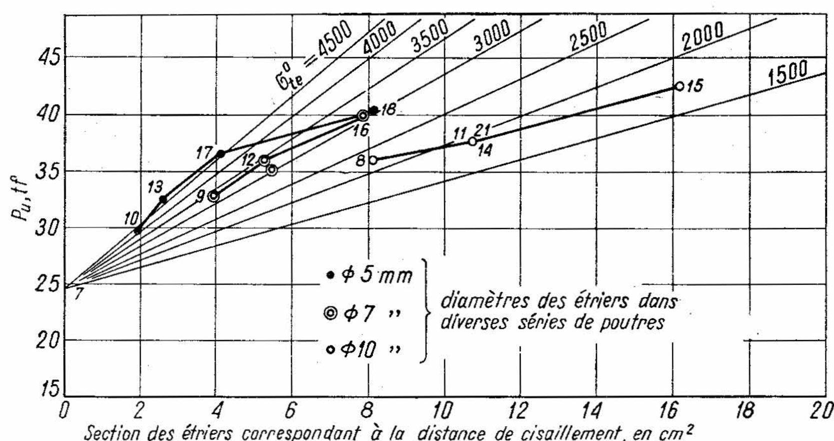


Fig. 5-22. Relation entre la force de rupture et la section transversale des étriers correspondant à la longueur de la zone de cisaillement [63], essais DAfE, cahier 10

La relation entre la valeur de la force de rupture et la section transversale des étriers dans la zone de cisaillement est représentée sur la figure 5-22. Les rayons partant du point de l'ordonnée 24,7 tf déterminent les contraintes de calcul σ^0_{te} dans les étriers.

D'après Mörsch [63], les efforts dans les étriers au moment de la rupture peuvent être calculés par la formule classique suivante

$$N'_{ay} = t b_0 \tau_0 . \tag{5.5}$$

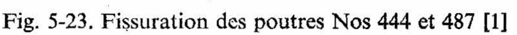


Fig. 5-23. Fissuration des poutres Nos 444 et 487 [1]

Ici, τ_0 doit être calculé à partir de la différence entre les efforts de rupture dans une poutre avec des étriers et ceux dans une poutre pareille sans étriers. Cela est déduit du fait qu'une partie de l'effort tranchant est transmise directement sur l'appui, et la bielle en béton qui se trouve entre le point d'application de la force et l'appui ne produit pas de tensions dans les étriers (fig. 5-24). Les contraintes dans les étriers sont dues exclusivement à l'effort tranchant correspondant au treillis fictif de MÖRSCH. Par exemple, dans la poutre No 487 représentée sur la figure 5-23 la force de rupture est égale à 36,3 tf, ce qui donne

$$T = \frac{36,30}{2} = 18,15 \text{ tf},$$

tandis que dans la même poutre sans étriers (No 444)

$$T = \frac{24,70}{2} = 12,35 \text{ tf}.$$

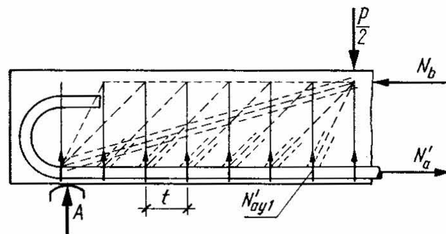


Fig. 5-24. Schéma du comportement de la poutre après la formation d'une fissure oblique secondaire

Cela indique que pour la poutre No 487 (fig. 5-23), on a

$$\tau_0 = \frac{18150-12350}{20 \cdot 0,9 \cdot 36} = 9,0 \text{ kgf/cm}^2;$$

par suite, l'effort dans les étriers situés dans un plan est

$$N'_{ay1} = 10 \cdot 20 \cdot 9,0 = 1800 \text{ kgf}$$

et on trouve

$$\sigma^0_{te} = \frac{1800}{2 \cdot 0,196} = 4600 \text{ kgf/cm}^2.$$

Les contraintes σ^0_{te} calculées ainsi sont représentées sur la figure 5-22.

L'analyse des essais DAfE, cahier 10, conduit à la conclusion que des étriers minces peu espacés produisent une augmentation de la capacité portante beaucoup plus grande que des étriers forts très espacés. Cette conclusion peut être formulée d'après la figure 5-22, bien que le schéma soit un peu moins clair, car dans quelques poutres la limite de la capacité portante a été atteinte plus tôt, par le glissement dans l'ancrage des armatures principales.

Essais DAfE, cahier 20 [2]

Les poutres examinées sont représentées sur la figure 5-25. La charge uniformément répartie a été remplacée par 8 forces concentrées P, disposées tous les 1/9 de la travée. La résistance du béton était égale, comme dans les essais DAfE, cahier 10, à 250 kgf/cm² environ. On a employé les armatures principales en acier : $Q'_{a;\varnothing 40} = 3072$ kgf/cm² de limite élastique, et les étriers en acier : $Q'_{ae;\varnothing 7} = 4103$ kgf/cm². Les résultats les plus intéressants des essais (moyennes relatives aux trois poutres de chaque série) sont indiqués par le tableau 5-2. Ces résultats montrent que, de même que dans les poutres chargées par deux forces, les étriers augmentent la capacité portante de façon considérable. L'influence des étriers est d'autant plus grande que l'ancrage des armatures principales sur l'appui est meilleur. Dans le cas d'une charge uniformément répartie (comme précédemment pour

deux forces concentrées) les efforts dans les étriers, calculés d'après la méthode classique $N'_{ay1} = tb_0\tau_0$, étaient très supérieurs aux efforts effectifs. Par exemple, pour les poutres de la série 54 les contraintes calculées sont très élevées et improbables

$$\sigma_{te}^0 = 6300 \text{ kgf/cm}^2 \geqslant Q_{ae} = 4103 \text{ kgf/cm}^2.$$

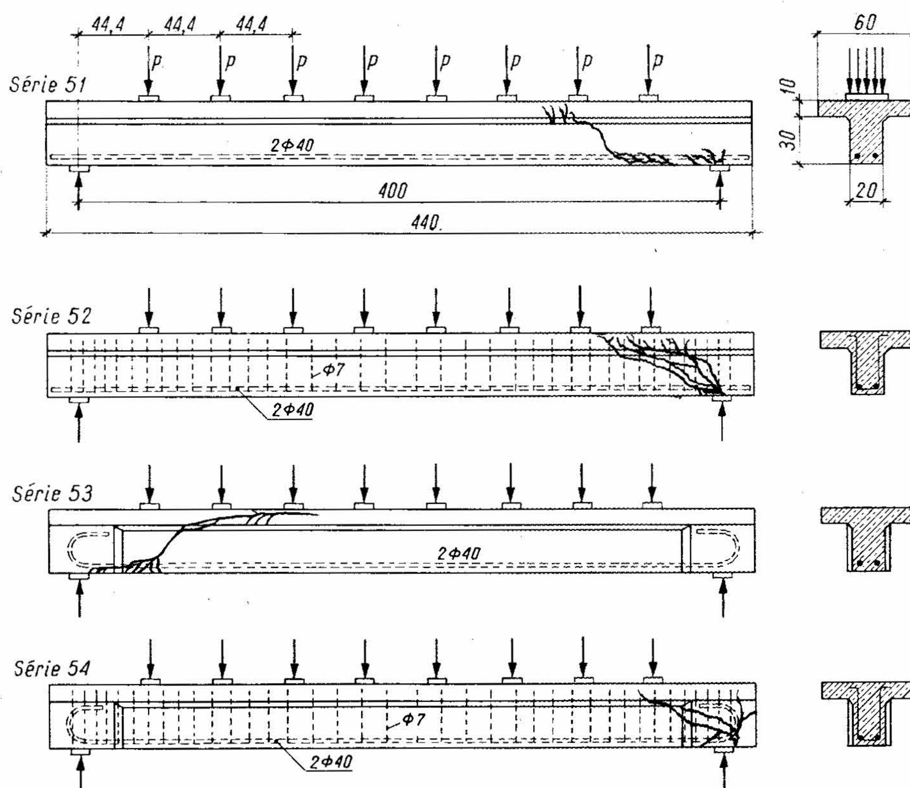


Fig. 5-25. Poutres dans les essais de DAfE, cahier 20 [2]

TABLEAU 5-2

Série des poutres	Armature longitudinale mm	Etriers mm	Début du glissement de l'armature principale		Valeurs maximales			
			$8P_g$ tf	τ_g^0 kgf/cm²	$8P_u$ tf	$\tau_n = \tau_{max}$ kgf/cm²	σ_{br} kgf/cm²	σ_a^0 kgf/cm²
51	2 Ø 40 sans crochets	—	21,3	17,7	21,3	17,7	91,9	1577
52	2 Ø 40 sans crochets	38 Ø 7	26,0	21,7	30,7	25,3	131,4	2252
53	2 Ø 40	—	21,0	17,5	23,3	19,2	99,6	1715
54	2 Ø 40	38 Ø 7	27,1	22,6	42,7	34,6	179,6	3041

Dans l'analyse de ces essais, MÖRSCH a conclu que le bras de levier z des efforts sous la charge était presque constant sur toute la longueur de la poutre, car les fissures au centre de la travée et dans la zone de cisaillement avaient à peu près la même profondeur. La valeur constante de z n'était donc possible que si les tensions N'_a dans les armatures principales diminuaient vers les appuis, conformément au diagramme des moments. Ce phénomène avait lieu quand l'accroissement $\Delta N'_a$ sur le segment entre les fissures était transmis au béton par l'adhérence. La relation suivante devait alors être satisfaite

$$\Delta N'_a = p_a \tau_d l_{fv} = b_0 \tau_0 l_{fv}. \quad (5.6)$$

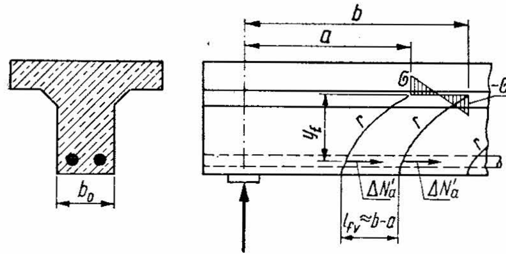


Fig. 5-26. Contraintes d'une bielle en béton au niveau des extrémités des fissures obliques, dues à l'application de l'effort $\Delta N'_a$ d'après MÖRSCH

D'après MÖRSCH l'effort $\Delta N'_a$ produit dans le béton au niveau des contraintes de traction (fig. 5-26) était tel que

$$\sigma = \frac{\Delta N'_a y_f}{\frac{1}{6} b l_{fv}^2} = \frac{6 \tau_0 y_f}{l_{fv}}. \quad (5.7)$$

Les contraintes effectives sont un peu inférieures à celles calculées par la formule (5.7), car le moment appliqué sur une bielle en béton $\Delta N'_a y_f$, créée par les fissures obliques, est partiellement réduit par un couple de forces dû à l'action de l'armature principale.

Ces considérations théoriques de MÖRSCH n'ont pas été complètement confirmées par les résultats d'essais plus récents. Les mesures précises effectuées par les jauges ont montré que les bielles en béton découpées par les fissures obliques sont presque idéalement comprimées par les efforts axiaux, à condition d'une adhérence correcte de l'acier au béton.

Essais DAfE, cahier 12 [3]

Les essais ont été effectués sur 7 groupes de poutres en forme de T, chaque groupe comportant 4 poutres. La différence entre les groupes résidait dans la disposition des barres relevées et dans l'ancrage des armatures principales. De plus, quatre poutres dans les trois premiers groupes étaient armées d'étriers supplémentaires de Ø 7 mm. Une poutre de chaque groupe est représentée sur la figure 5-27.

La force maximale de rupture $P_u = 49{,}5$ tf a été obtenue pour la poutre de la série 38, armée d'après le schéma en un treillis double, avec des bielles inclinées à 45°. La section des barres relevées a été déterminée suivant la méthode classique pour l'effort oblique $N'_{a02} = \frac{1}{2} T \sqrt{2}$. Pour ce système d'armature on a employé 71,9 kg d'acier, tandis que dans une poutre pareille (série 15) armée par des étriers verticaux et des barres droites, la masse de l'armature était égale à 93,8 kg. Il est à noter que dans ce cas la force de rupture était $P_u = 42{,}7$ tf, donc inférieure par rapport au cas précédent. D'après ces résultats, MÖRSCH a conclu que l'armature bien déterminée suivant les lignes de force était plus efficace. Respectant l'influence positive des étriers, MÖRSCH a proposé d'utiliser ceux-ci avec les

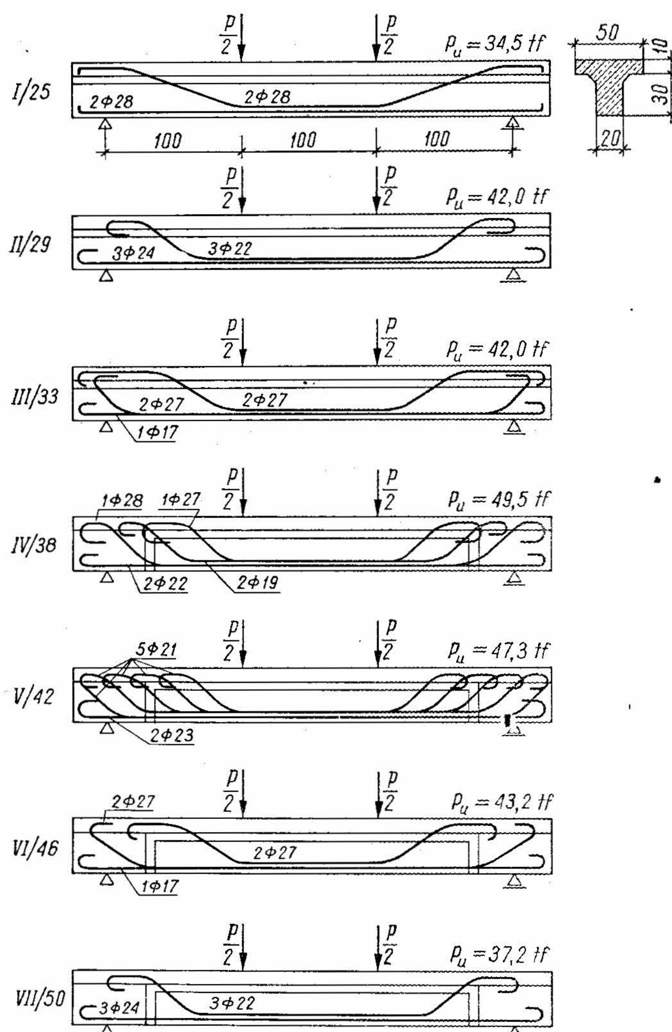


Fig. 5-27. Poutres dans les essais de DAfE, cahier 12 [3]

barres relevées, lesquelles joueraient le rôle primordial dans la transmission des efforts obliques de traction.

La figure 5-28 montre la poutre de la série 38, dont les armatures ont été relevées avec un grand rayon de courbure (P_u = 49,5 tf), ainsi que la poutre de la série 50 dont les armatures ont été relevées avec un petit rayon de courbure. Le petit rayon de courbure a été la cause d'une chute brusque de la force de rupture. La courbure d'une barre avec un rayon insuffisant a produit une pression locale si forte qu'une partie du béton a éclaté (zones hachurées de la figure 5-28b), ce qui a provoqué la rupture prématurée de la poutre.

En ce qui concerne l'ancrage des armatures principales par des crochets, il résulte des essais présentés ici que des éclatements des faces frontales ne sont à craindre que pour les

barres de diamètre supérieur à 27 mm. De cette constatation proviennent probablement les prescriptions allemandes spécifiant qu'il faut vérifier l'adhérence des barres dont le diamètre est supérieur à 25 mm.

Ce problème a été largement traité, déjà en 1913, par R. SALIGER, qui a constaté une amélioration considérable de l'ancrage par l'adjonction d'étriers supplémentaires dans le voisinage de l'appui. Les résultats des essais de SALIGER dans ce domaine sont présentés ici sur la figure 5-29.

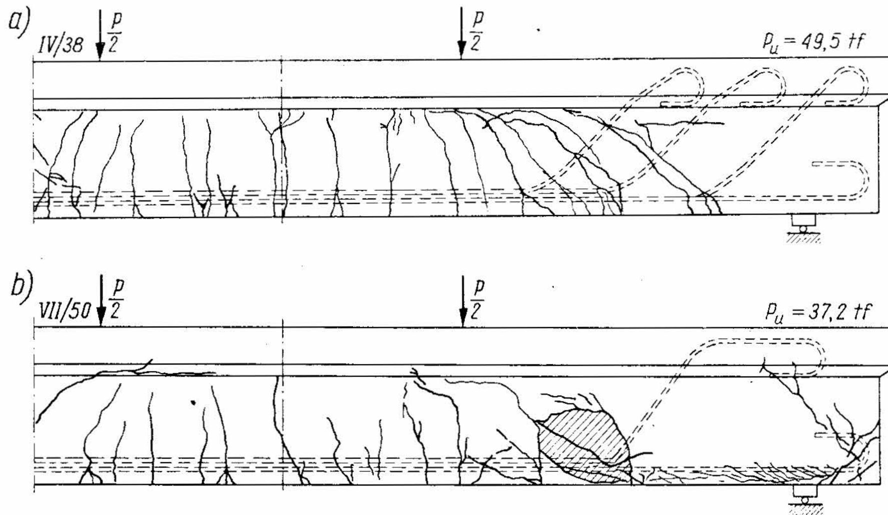


Fig. 5-28. Fissuration des poutres dans les essais [3] : a) poutre IV/38 avec des barres relevées à grand rayon de courbure, b) poutre VII/50 avec des angles vifs des barres

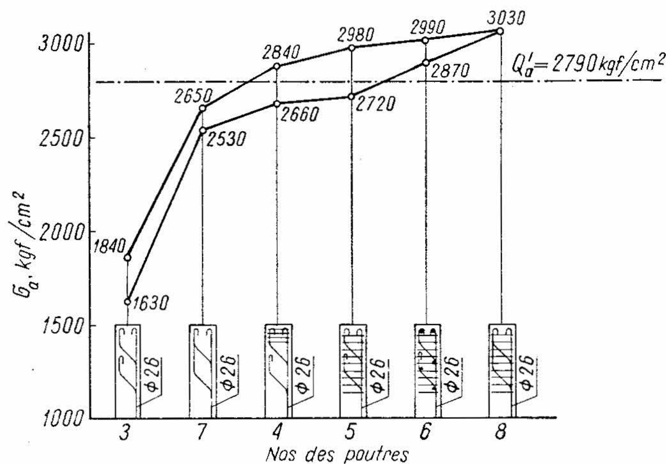


Fig. 5-29. Efficacité des différents types d'ancrages d'après les essais de SALIGER [76]

Les essais de BACH et GRAF indiquent en outre qu'il n'y a pas de différences considérables dans les flèches des poutres armées selon les schémas d'un double ou triple treillis. Les étriers supplémentaires utilisés en plus des barres relevées ont permis de diminuer les flèches de 6 % environ. Sur la figure 5-30 on a indiqué les flèches des poutres munies d'une part d'une armature disposée suivant les lignes de force et d'autre part d'une armature orthogonale. Nous pouvons constater que pour de faibles charges les flèches ne dépendent pas de la nature de l'armature transversale. Ce n'est que sous des charges importantes que les

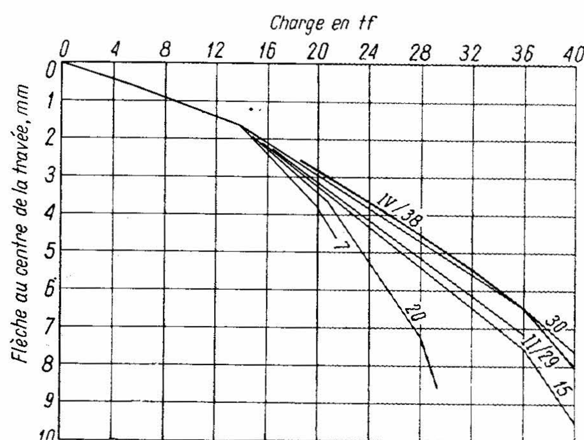


Fig. 5-30. Flèches des poutres avec une armature orthotrope et de celles munies d'une armature suivant les lignes de force [63]

poutres avec l'armature orthogonale (composée d'étriers et de barres droites — séries 7, 15, 20) subissent des flèches supérieures à celles des poutres armées suivant les lignes de force (séries 29, 30, 38).

Essais DAfE, cahier 48 [4]

Une des poutres examinées, en forme de T (No 1024), est représentée sur la figure 5-31. La charge est constituée par 16 forces concentrées espacées tous les 1/16 de la travée. Les dimensions des poutres et la largeur du hourdis ont été augmentées par rapport aux essais précédents (DAfE, cahiers 10, 12, 20). En outre, le hourdis a été armé par des barres Ø 7 mm perpendiculaires à l'axe de la poutre. La figure 5-32a représente la poutre No 1026 où l'armature transmet 100 % du cisaillement, conformément à la théorie classique de MÖRSCH, et la figure 5-32b montre la poutre No 1025 où n'a été prévu que 50 % de l'armature pour le cisaillement. Les figures 5-33a et b concernent respectivement la poutre No 1031 avec 37 % de l'armature pour le cisaillement et la poutre No 1032 armée suivant les indications du règlement de la Prusse de 1907. Toutes les poutres ont été exécutées en béton de $\sigma_{wu} = 282$ kgf/cm^2 et armées par de l'acier dont la limite d'élasticité est égale à 3500 kgf/cm^2 environ.

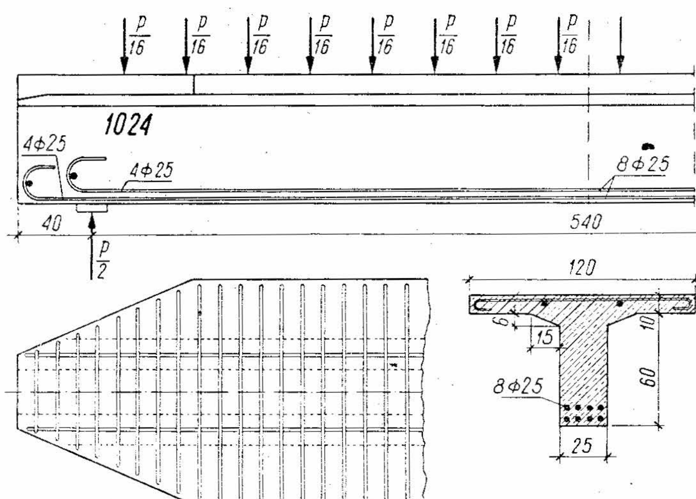


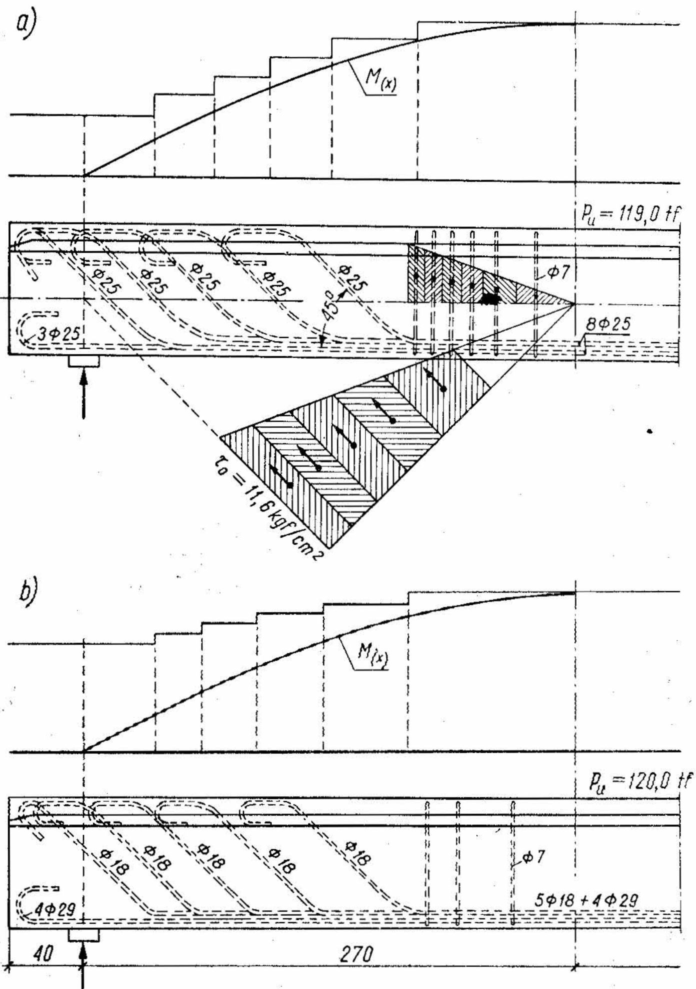
Fig. 5-31. Poutre No 1024 dans les essais de DAfE, cahier 48 [4]

Les valeurs des forces de rupture de ces poutres, déterminées par les essais, sont indiquées sur le tableau 5-3. Si l'on désigne par $\eta = 1{,}0$ le cas de l'armature transmettant 100 % du cisaillement, on peut constater que lorsque η diminue jusqu'à 0,5 (poutre No 1025) la valeur de la force de rupture n'est pas réduite.

Evidemment, c'est la poutre No 1024, de coefficient $\eta = 0$, qui a eu la capacité portante minimale et égale à $P_u = 48{,}8$ tf. Dans la poutre No 1031, avec $\eta = 0{,}37$, la capacité portante a diminué de 20 % et dans la poutre 1032 armée conformément au règlement de la Prusse la réduction était de 25 % environ, malgré que la section des barres relevées était dans cette dernière supérieure à celle des barres de la poutre No 1031. Deux poutres seulement, à savoir la poutre No 1026 ($\eta = 1{,}0$) et la poutre No 1025 ($\eta = 0{,}5$) ont atteint la capacité portante maximale, et la rupture a eu lieu quand les contraintes dans l'armature principale au milieu de la travée étaient égales à $\sigma_a = Q'_a$. L'analyse des efforts à l'intérieur

TABLEAU 5-3

Poutre No	Résistance du béton σ_{wu} kgf/cm²	Limite d'élasticité de l'acier Q'_a kgf/cm²	Pourcentage de cisaillement transmis par les barres relevées	Force de rupture P_u tf	Poids de l'armature kgf
1024	282	environ 3000	sans armature transversale	48,8	218,9
1026	282	„ 3000	100 % ($\eta = 1$)	119,0	222,3
1025	282	„ 3000	50 % ($\eta = 0{,}5$)	120,0	220,7
1031	282	„ 3000	37 % ($\eta = 0{,}37$)	96,0	216,6
1032	282	„ 3000	d'après le règlement de la Prusse de 1907	92,0	228,1



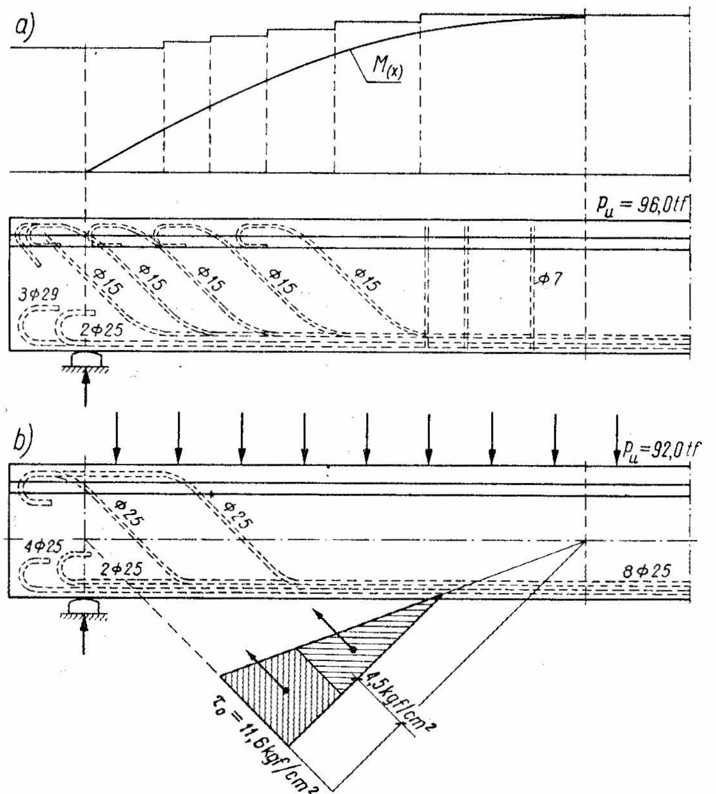


Fig. 5-33. Poutres dans les essais de DAfE, cahier 48 [4] : a) poutre No 1031 avec le cisaillement transmis à 37 % par l'armature, b) poutre No 1032 armée d'après les indications du règlement de la Prusse de 1907

Fig. 5-32. Poutres dans les essais de DAfE, cahier 48 [4] : a) poutre No 1026 avec le cisaillement entièrement transmis par l'armature (100 %), b) poutre No 1025 avec le cisaillement transmis à 50 % par l'armature

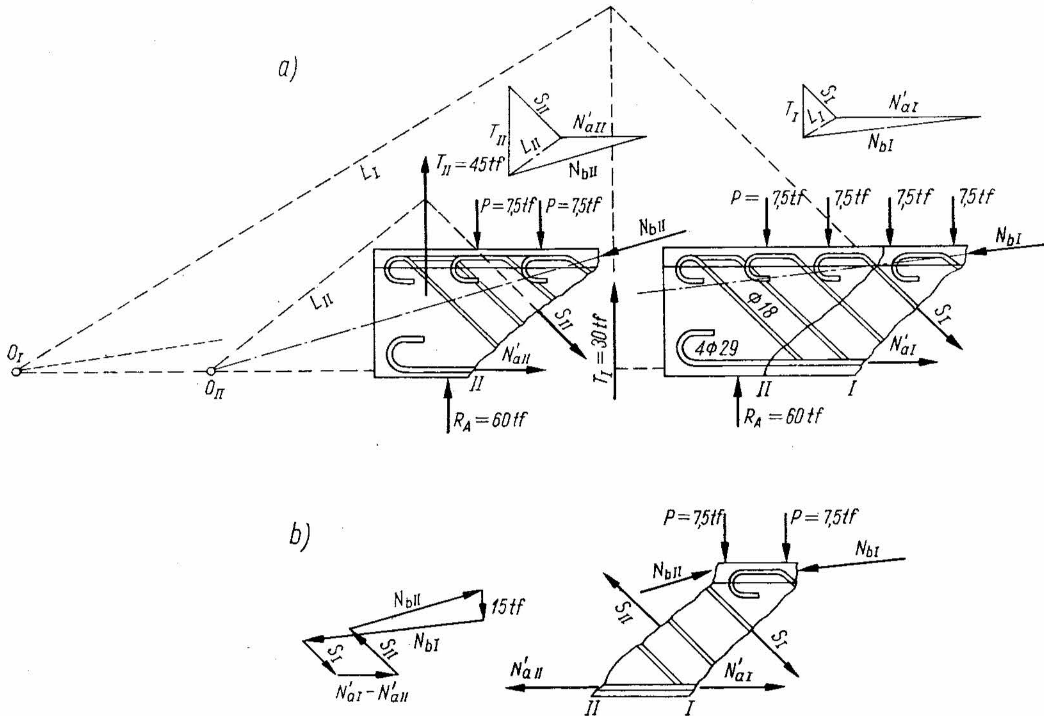


Fig. 5-34. Equilibre des efforts internes dans la poutre No 1025 fissurée, d'après MÖRSCH [63] : a) état d'équilibre des éléments de la poutre séparés par les fissures *II* et *I* ainsi que les polygones respectifs des forces, b) état d'équilibre d'un élément séparé par les fissures *II* et *I* et le polygone des forces

de la zone d'appui de la poutre No 1025 est très intéressante dans l'état précédant immédiatement l'arrivée à la limite de la capacité portante, car la disposition des fissures met en évidence l'impossibilité d'expliquer une résistance tellement élevée par l'effet d'un arc avec un tirant. Pour expliquer ce problème nous considérons l'état d'équilibre de la zone d'appui séparée par une fissure oblique de la poutre (fig. 5-34).

Pour déterminer les efforts N'_{aI} et N_{bI} (fig. 5-34) nous devons examiner l'état d'équilibre d'un élément découpé par une fissure oblique *I*, chargé par une force connue $R_A = 60$ tf et quatre forces $P_u = 7{,}5$ tf. La valeur et la direction de la force S_I sont connues d'après le produit $A'_{a0}Q'_a$ qui est ici égal à 26,3 tf. Ensuite nous déterminons la valeur et la position de l'effort tranchant $T_I = 30$ tf et nous définissons la direction de la résultante L_I d'après le polygone des forces S_I et T_I. Trouvant le point de concours de L_I avec la direction N'_{aI}, nous déterminons l'inclinaison de l'effort N_{bI} et enfin, d'après le polygone des forces, nous obtenons les valeurs des efforts N'_{aI} et N_{bI}. L'effort $N'_{aI} = 82$ tf ainsi déterminé produit dans les armatures principales la contrainte $\sigma'_{aI} = 2620$ kgf/cm^2, tandis que d'après la distribution du moment fléchissant on doit avoir $\sigma'_a = 1830$ kgf/cm^2. On peut donc conclure que l'inclinaison de la résultante des contraintes de compression dans le béton

N_b produit une diminution de l'effort oblique de traction et — simultanément — une augmentation de l'effort de traction dans les barres de l'armature principale.

D'une façon analogue, en examinant l'équilibre de l'élément séparé par la fissure *II* il est possible de déterminer les efforts dans cette section (N'_{aII} = 48 tf). L'équilibre des forces appliquées à l'élément de la poutre séparé par les sections *I* et *II* (fig. 5-34b) permet de vérifier que la solution est correcte. Etant donné que le polygone des forces composé de la résultante des deux forces extérieures et des six efforts intérieurs est fermé, on peut en déduire que l'analyse effectuée est correcte.

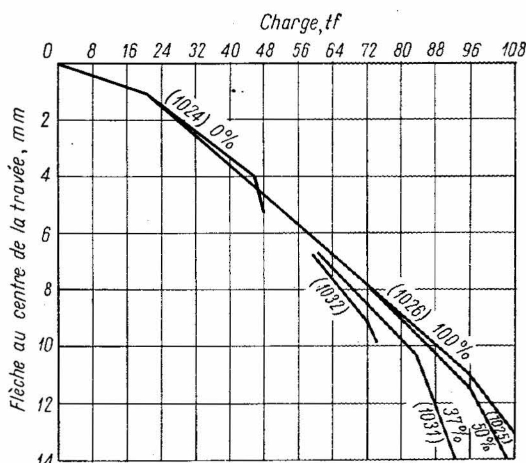


Fig. 5-35. Flèches des poutres avec un pourcentage différent du cisaillement transmis par l'armature [63]

D'après l'énumération des efforts de rupture donnée dans le tableau 5-3 il résulte que la séparation du diagramme des contraintes de cisaillement d'une bande de largeur 4,5 kgf/cm² (fig. 5-33b), conformément au règlement de la Prusse, peut conduire non pas tant à une armature insuffisante pour le cisaillement près des appuis qu'à un affaiblissement dangereux de la partie centrale de la poutre, entraînant une diminution considérable de la capacité portante de celle-ci. Il est à souligner que dans ce type d'armature aucune économie d'acier n'a été réalisée par rapport à l'armature prévue pour 100 % du cisaillement.

La figure 5-35 nous montre que la transmission partielle du cisaillement par les barres relevées conduit à une augmentation des flèches.

Essais DAfE, cahier 58 [29]

Tous les essais de DAfE présentés ci-dessus ont été effectués sur des poutres en béton armé dont la résistance était de l'ordre de 230 à 280 kgf/cm². Or, il est souvent intéressant d'examiner le problème du cisaillement dans les poutres en béton de faible résistance, car les résultats obtenus sur les éléments en béton fort ne sont pas tous applicables au calcul des éléments en béton faible. Dans les années 20, MÖRSCH a préparé un programme d'essai pour l'entreprise « Ways Freytag », programme prévoyant la reprise de certains essais sur

les poutres des essais mentionnés précédemment [4]. On a conservé l'armature et la forme géométrique des poutres, mais on a réduit de deux ou même trois fois la résistance du béton. La poutre en forme de T No 1117 a été exécutée exactement comme la poutre représentée sur la figure 5-32a mais en béton de résistance 72 kgf/cm². La limite de la capacité portante sous la charge $P_u = 79{,}5$ tf a été atteinte par l'écrasement du béton là où les armatures étaient relevées, le rayon de courbure étant néanmoins relativement important et égal à dix diamètres. La seule différence entre la poutre No 1118 et No 1025 (figure 5-32b) était la résistance du béton de la première — 110 kgf/cm². Sous la charge $P_u = 78$ tf se sont produits l'écrasement et l'éclatement du béton dans un des avant-derniers coudes des barres, et c'était la cause directe de la fin de la résistance de la poutre.

La charge de rupture $P_{max} = 137$ tf n'était atteinte que dans la poutre No 1131. L'armature transversale de cette poutre correspondait à 100 % du cisaillement (la forme et l'armature étant identiques à celles de la poutre No 1026 représentée sur la figure 5-32a) et la poutre a été exécutée en béton de résistance $\sigma_{wu} = 154$ kgf/cm².

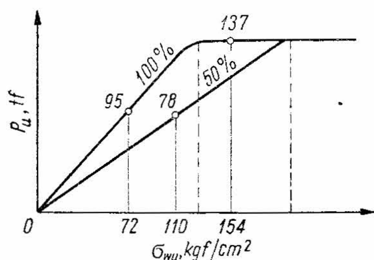


Fig. 5-36. Relation entre la capacité portante de la poutre, la résistance du béton et le pourcentage du cisaillement transmis par l'armature [63]

Le résultat des essais des poutres en béton de diverses résistances a été finalement indiqué par MÖRSCH sous la forme du diagramme représenté sur la figure 5-36. On y voit la relation entre la capacité portante de la poutre et deux paramètres : la résistance du béton et le pourcentage d'armature transversale. D'après ce diagramme l'armature transversale correspondant à 50 % ($\eta = 0{,}5$) assure la même capacité portante que pour 100 % ($\eta = 1{,}0$) pour les bétons de résistance de l'ordre de 200 kgf/cm² au moins. Par contre, pour les bétons plus faibles avec une armature transversale de 50 % on doit prévoir la diminution de la capacité portante à partir de $\sigma_{wu} = 180$ kgf/cm², tandis que pour $\eta = 1{,}0$ cette diminution n'intervient qu'au-dessous de $\sigma_{wu} = 125$ kgf/cm².

D'après ces constatations on peut formuler deux conclusions pratiques, à savoir:

a) pour les bétons de résistance inférieure à 180 à 200 kgf/cm² il faut armer les poutres à 100 % au cisaillement ;

b) les poutres soumises à des efforts tranchants importants doivent avoir une résistance $\sigma_{wu} > 125$ kgf/cm².

Les essais ultérieurs sur les poutres en forme de T en béton de faible résistance ont été exécutés en les chargeant de deux forces concentrées symétriques.

La figure 5-37 représente l'armature des poutres No 1124 ($\eta = 1{,}0$) et No 1133 ($\eta = 0{,}5$) en béton de résistance $\sigma_{wu} = 117$ kgf/cm². La fissuration de la poutre No 1124 sous la charge de rupture $P_u = 73{,}5$ tf est représentée sur la figure 5-38 et celle de la poutre No 1133, sur la figure 5-39. En comparant les résultats des essais (tabl. 5-4) on voit que le rapport maximal entre la force de rupture et le poids de l'acier employé a eu lieu dans la poutre No 1124 où le cisaillement a été complètement transmis par les barres relevées et par les étriers. Il est vrai que dans la poutre No 1132 armée par des étriers à 50 % du cisail-

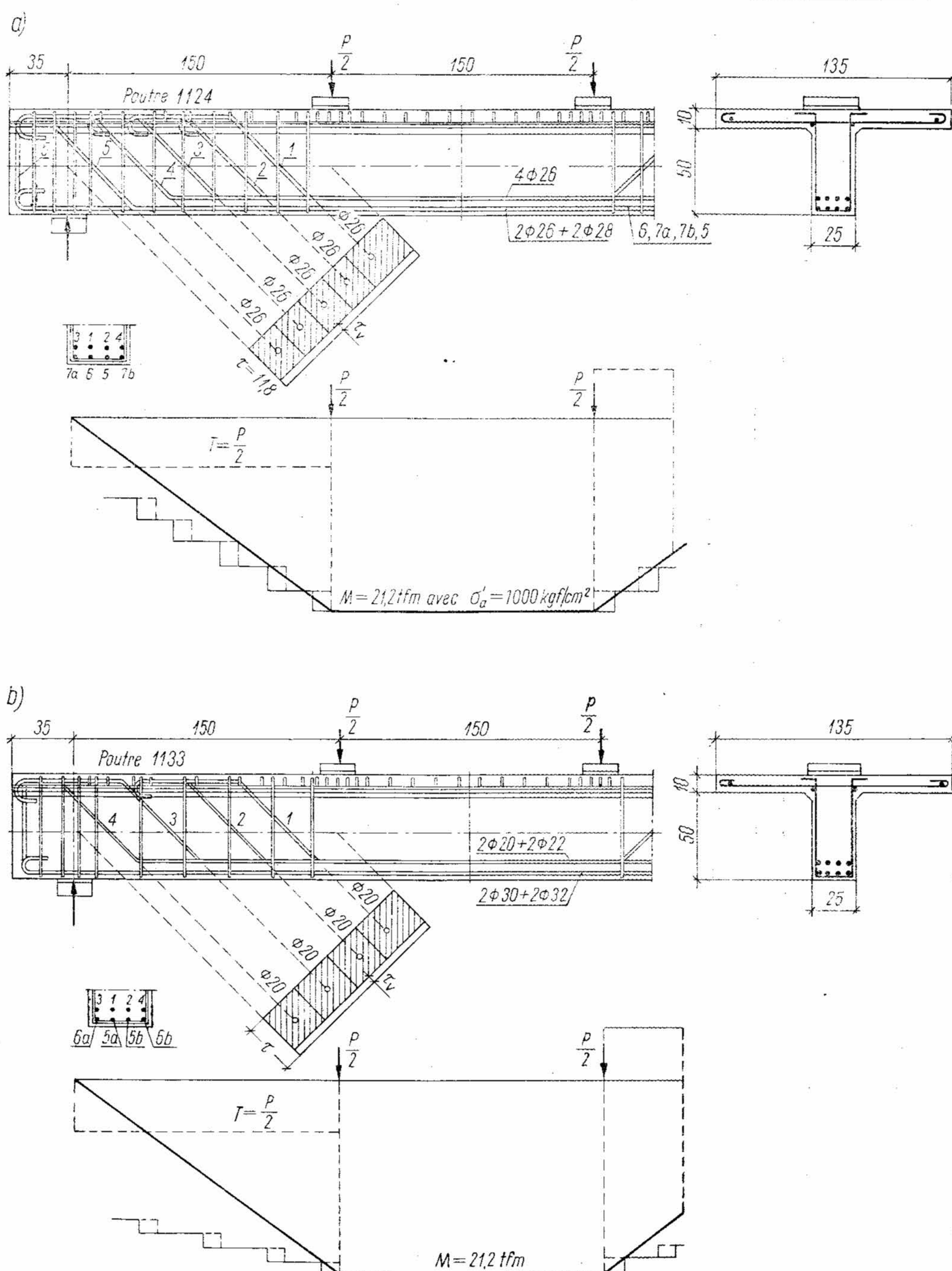


Fig. 5-37. Poutres dans les essais de DAfE, cahier 58 [29] : a) poutre No 1124 (σ_{wu} = 117 kgf/cm²) avec le cisaillement entièrement transmis par l'armature, b) poutre No 1133 (σ_{wu} = 117 kgf/cm²) avec le cisaillement transmis à 50 % par l'armature

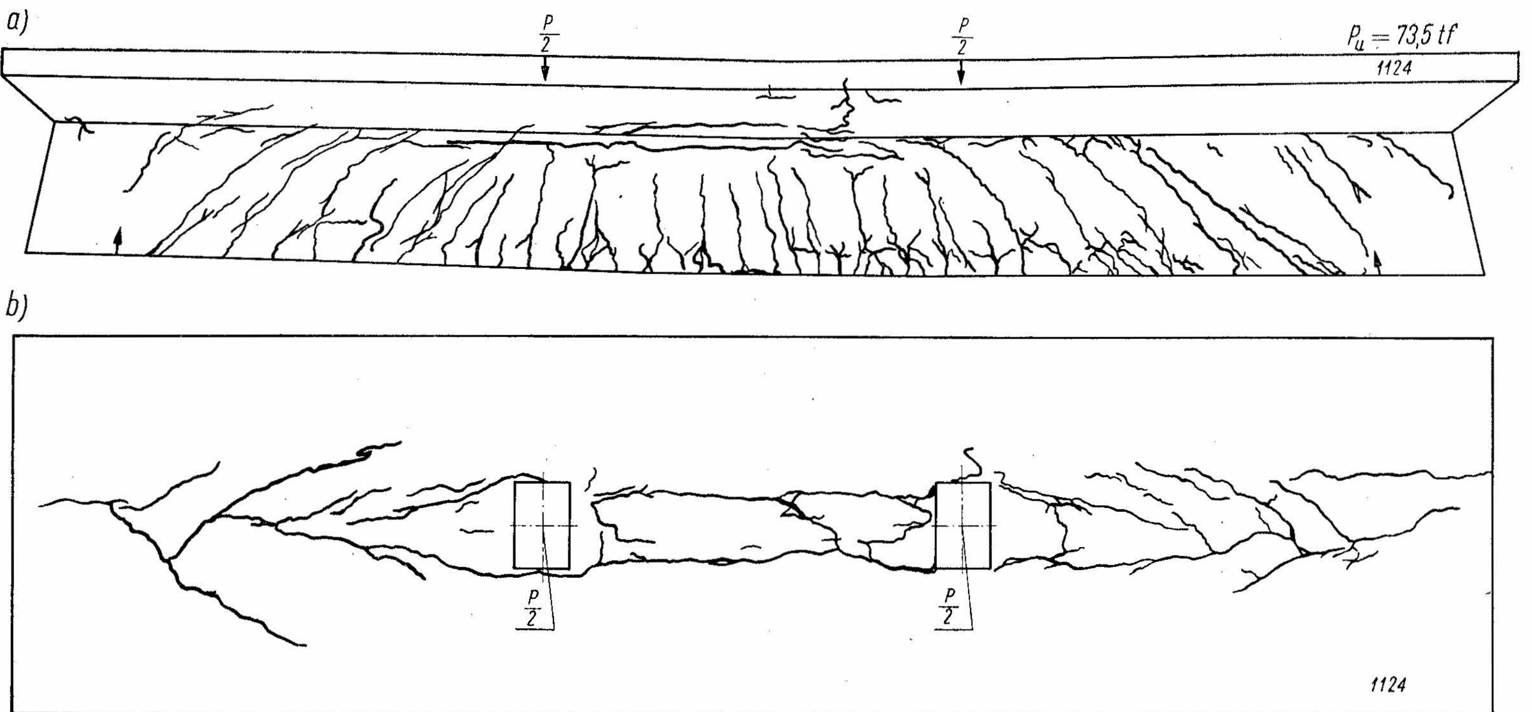


Fig. 5-38. Fissuration de la poutre No 1124 [29] : a) vue latérale, b) vue de la face supérieure

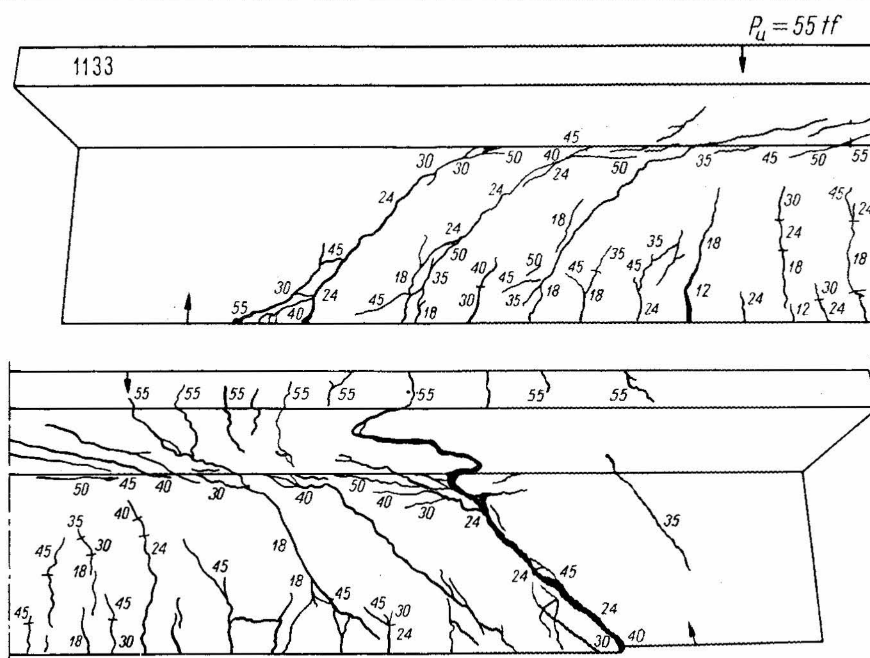


Fig. 5-39. Fissuration de la poutre No 1133 [29]

TABLEAU 5-4

Poutre	Résistance du béton		Limite d'élasticité de l'acier Q'_a kgf/cm²	Pourcentage de cisaillement transmis par l'armature	P_u tf	Poids de l'armature G_a kgf	$\frac{P_u}{G_a}$
	σ_{wu} kgf/cm²	σ' kgf/cm²					
1124	117	7,8	2500	— 100 % ($\eta = 1{,}0$) barres relevées et étriers	73,5	199,0	0,369
1127	117	7,2	2500	— 50 % ($\eta = 0{,}5$) barres relevées et étriers	51,0	200,0	0,255
1129	123	8,0	2500	— comme poutre No 1127 mais armatures principales arrêtées conformément au diagramme $M(x)$	52,0	175,5	0,296
1130	138	10,3	2500	— 100 % ($\eta = 1{,}0$) étriers et barres relevées, ancrées dans la zone tendue	63,0	230,9	0,272
1132	116	—	2500	— 50 % ($\eta = 0{,}5$) étriers seulement	75,0	215,3	0,348
1133	120	—	2500	— comme poutre No 1132 mais armatures principales arrêtées conformément au diagramme $M(x)$	55,0	171,4	0,321

lement on a atteint aussi la limite de résistance complète (75,0 tf), mais c'était grâce au prolongement de toutes les armatures jusqu'à l'appui, d'où une consommation d'acier plus élevée que dans le cas de l'armature à 100 % dans la poutre No 1124. La poutre No 1124 a de plus montré les flèches minimales.

Dans toutes les poutres on a observé la tendance à un écart entre le hourdis et la nervure, ce qui était marqué par l'apparition d'une fissure à la jonction (fig. 5-38b).

Essais DAfE, cahier 67 [30]

Les essais ont été effectués sur trois séries de poutres en forme de T en béton de résistance de l'ordre 130 à 140 kgf/cm².

La série *I* comportait 3 poutres. La première No 1200 était armée à 100 % au cisaillement ($\eta = 1,0$) ; dans les deux autres l'armature transversale a été prévue conformément au règlement DIN de 1916, c'est-à-dire sans armature sur le segment où $\tau < 4,0$ kgf/cm².

Les poutres de la série *I* sont représentées sur la figure 5-40. La valeur des efforts de rupture et la disposition des fissures montrent d'une façon claire que la limite de la résistance complète à la flexion n'était obtenue que dans la poutre No 1200. Les essais ont

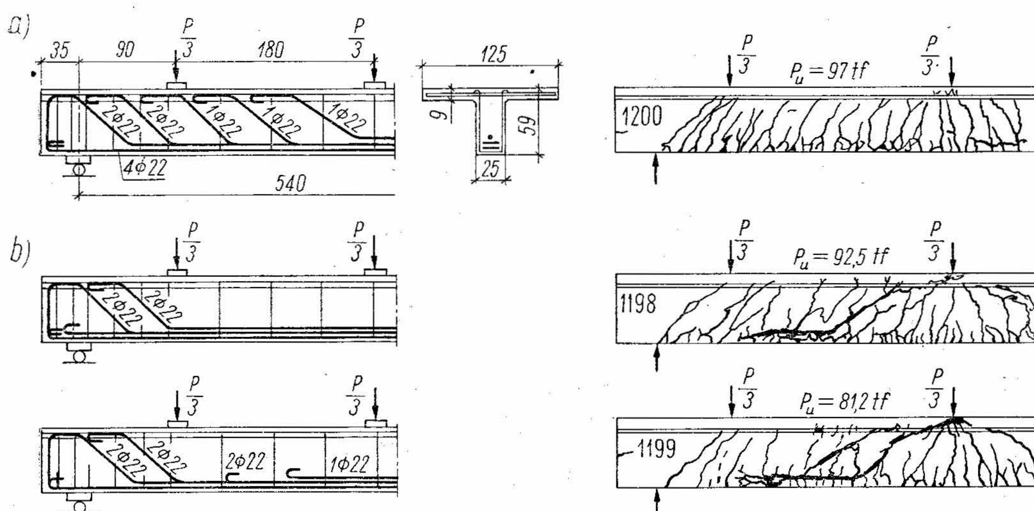


Fig. 5-40. Poutres dans les essais de DAfE, cahier 67 (série *I*), [30] : a) poutre No 1200 avec le cisaillement entièrement transmis par l'armature, b) poutres Nos 1198 et 1199 avec l'armature transversale conformément à DIN de 1916

indiqué également que l'ouverture des fissures a eu lieu sous une charge très inférieure à celle prévue dans l'exploitation.

La figure 5-41 indique l'aspect des poutres de la série *II*. La répartition des fissures et la valeur des forces de rupture mettent en évidence l'efficacité du système d'armature préconisé par Mörsch. Pour la poutre No 1203 avec le cisaillement transmis entièrement

par les barres relevées la limite de résistance à la flexion a été atteinte sous une charge de 75,75 tf pour une consommation de 200 kg d'acier, tandis que dans la poutre No 1204 l'application de l'armature de continuité sur le segment de $\tau < 4{,}0$ kgf/cm^2 a eu comme effet une augmentation de la consommation d'acier (227,5 kg), et la limite de résistance atteinte déjà sous la charge de 60,55 tf.

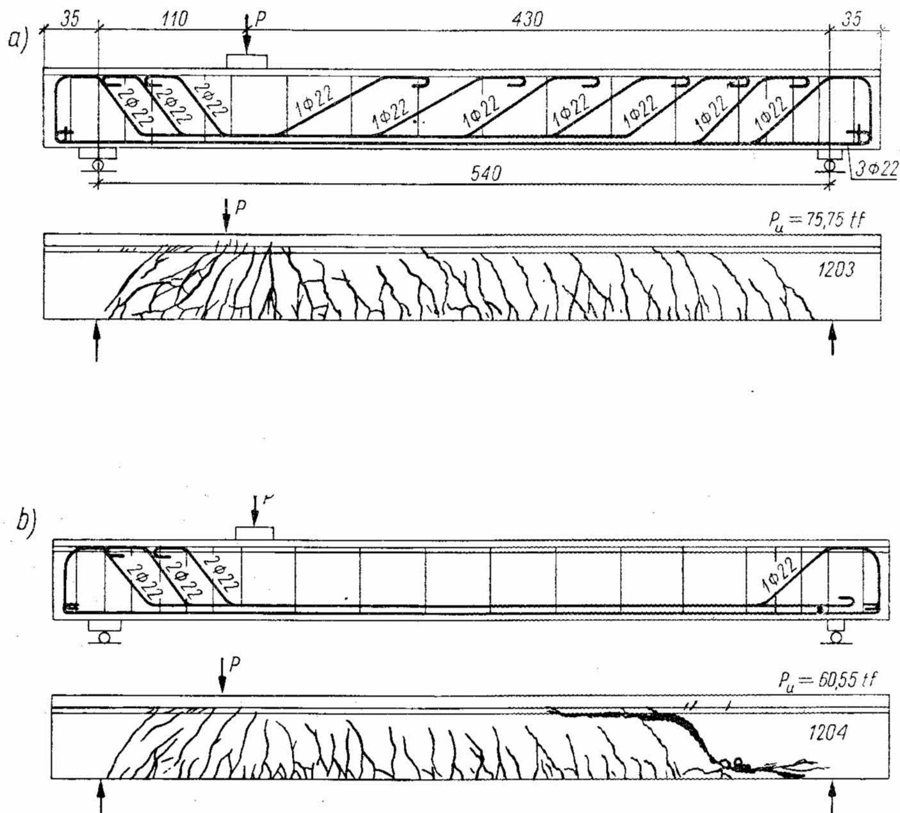


Fig. 5-41. Poutres dans les essais de DAfE, cahier 67 (série *II*) [30] : a) poutre No 1203 avec le cisaillement entièrement transmis par l'armature, b) poutre No 1204 avec l'armature transmettant le cisaillement total sur la longueur de la poutre où $\tau > 4{,}0$ kgf/cm^2

Les essais de la série *III*, dont les poutres sont représentées sur la figure 5-42, montrent assez bien l'efficacité des divers types de courbure des barres. Les barres relevées comme dans la poutre No 1189 sont les meilleures, aussi bien en ce qui concerne la résistance à la flexion que pour l'économie d'acier. La moins pratique est l'armature par barres « flottantes » employée dans la poutre No 1190.

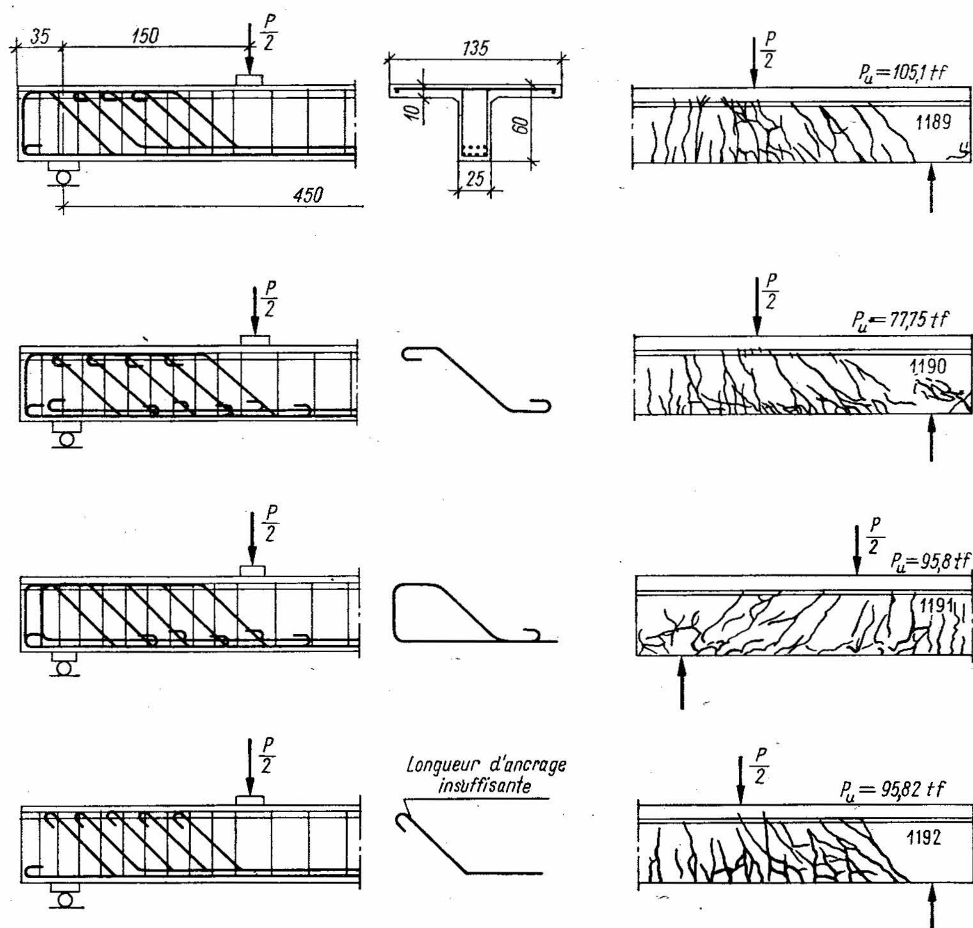


Fig. 5-42. Poutres dans les essais de DAfE, cahier 67 (série *III* — formes diverses des barres relevées) [30]

5.3.2. ESSAIS DE SLATER, LORD ET ZIPPRODT

Les essais [77] ont été commencés en 1918 suivant une commande de Concrete Ship Section of the Emergency Fleet Corporation et, conformément au programme initial, avaient pour but de créer la base de calcul des coques de navires en béton armé.

Cependant, l'analyse des résultats des essais a permis de formuler des conclusions utiles pour la théorie du béton armé. La forme des poutres essayées et leur armature étaient un peu différentes de celles utilisées habituellement dans les constructions en béton armé — c'était la conséquence de l'intention initiale d'employer les résultats des essais dans la construction des bateaux.

Dans les poutres d'essai représentées sur la figure 5-43 on a choisi la nature de l'armature transversale, l'épaisseur de l'âme et la résistance du béton comme des paramètres

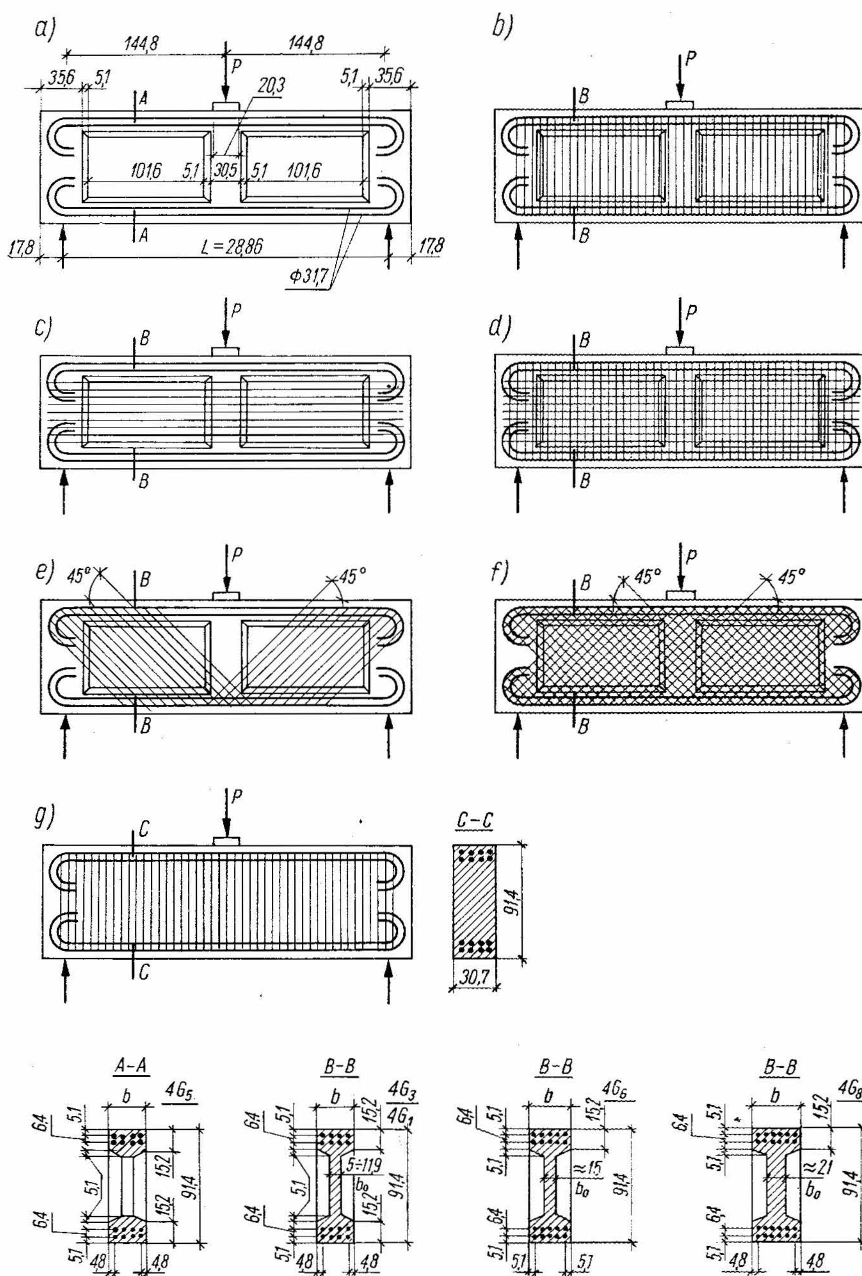


Fig. 5-43. Essais américain [77] : a) poutres sans âme ou avec âme mais sans armature transversale, b) poutres avec l'armature transversale en forme d'étriers verticaux, c) id. avec des étriers horizontaux, d) poutres armées simultanément d'étriers verticaux et horizontaux, e) poutres à étriers inclinés, f) poutres à deux systèmes orthogonaux d'étriers inclinés, g) poutre rectangulaire munie d'une armature transversale en forme d'étriers verticaux

variables. La résistance du béton, déterminée sur des cylindres de 20 cm de diamètre et de 40 cm de hauteur, était variable dans les limites de 110 à 436 kgf/cm^2.

L'armature des poutres a été réalisée sous forme de barres de diamètres: 31,7 ; 19,0 ; 15,9 ; 12,7 ; 9,5 mm, en acier dont la limite d'élasticité était respectivement : 3870, 4110, 4040, 4370 et 4920 kgf/cm^2. Au total, on a examiné 80 types différents de poutres dont la plupart ont été produites en double. Dans ces poutres on a mesuré les flèches et les déformations des armatures principales ainsi que des étriers ; les fissures et les valeurs de la force de rupture ont été également observées. Les résultats mentionnés ci-dessous ne constituent qu'une partie de ces essais, intéressants pour les problèmes relatifs au cisaillement dans le béton armé. Il est à souligner avant tout qu'on a obtenu des valeurs très élevées des contraintes de cisaillement dans les poutres, et ceci a permis à certains chercheurs américains de critiquer la condition de MÖRSCH dont la forme était la suivante $\tau^1_{max} \leqslant \sigma'$.

Par exemple, dans la poutre 4*G* armée par des étriers et des barres longitudinales de Ø 12,7 mm, espacées de 10,2 cm (fig. 5-43b) et dont la résistance est $\sigma^0_{cyl} = 390$ kgf/cm^2, la force de rupture est égale à $P_u = 130{,}75$ tf. Ainsi, on a dans l'âme de 8 cm d'épaisseur la contrainte de cisaillement suivante (sans tenir compte du poids propre de la poutre)

$$\tau_{max} = \tau_n = \frac{0{,}5 \cdot 130750}{8 \cdot 0{,}85 \cdot 83} = 115 \text{ kgf/cm}^2.$$

Dans les commentaires relatifs à ces essais GRAF a constaté qu'une partie des contraintes τ était transmise sur le cadre (sans l'âme, fig. 5-43a). Des essais américains il résulte que la force transmise par le cadre était égale à 32,0 tf. Par conséquent, d'après GRAF la contrainte τ_{max} pour la poutre $4G_1$ est égale

$$\tau_{max} = \frac{0{,}5(130750 - 32000)}{8 \cdot 0{,}85 \cdot 83} = 87{,}2 \text{ kgf/cm}^2.$$

Nous voyons que, malgré la réduction peu motivée de l'effort tranchant d'après la proposition de GRAF, la contrainte de cisaillement de rupture reste encore très élevée, car elle égale à 0,25 σ^0_{cyl}.

Ces considérations mènent à la constatation indubitable que la limitation $\tau^1_{max} \leqslant \sigma'$, employée depuis de nombreuses décennies et imposée par les règlements, ne peut plus être appliquée sans modifications dans tous les cas de poutres, indépendamment de leur forme et de la résistance du béton. Cela a été mis en évidence par les essais américains déjà dans les années 20. Récemment, cette constatation a été confirmée par les résultats des essais de LEONHARDT et WALTHER à Stuttgart (voir § 5.3.5).

Les essais américains ont montré que, pour la rupture des poutres par cisaillement, la résistance du béton a une influence considérable sur la capacité portante. Cette relation est d'autant plus importante que l'armature transversale est plus faible.

Le tableau 5-5 représente l'accroissement de la force de rupture d'après la figure 5-43a dans les poutres dont l'âme était sans armature ou bien dans les poutres dépourvues d'âme (section *A—A*). L'accroissement de la force de rupture P_u produit par l'augmentation d'épaisseur de l'âme a été plus lent que celui qui était lié à l'augmentation de *b*. Un phénomène pareil a été observé dans les poutres munies d'une armature transversale. Le tableau 5-6

TABLEAU 5-5

No	Epaisseur d'âme b_0 cm	Armature transversale tendue A'_a mm	Résistance du béton σ_{pr} kgf/cm²	$P_{max} = P_u$ tf	Augmentation de la force de rupture due à l'accroissement de l'épaisseur de l'âme ΔP_u tf	$\frac{P_u}{b_0}$ kgf/cm
1	0		401	32,35	—	—
2	8,1		378	80,65	48,3	5960
3	15,4	8 Ø 31,7	434	102,75	70,4	4570
4	21,7		425	105,70	73,35	3380
1	0		235	23,5	—	—
2	7,9		287	68,05	44,55	5640
3	14,6	8 Ø 31,7	257	91,15	67,65	4630
4	21,6		285	107,95	84,45	3910

TABLEAU 5-6

Poutre	Epaisseur de l'âme b_0 cm	Armature tendue principale A'_a mm	Armature transversale	Résistance du béton σ_{cyl} kgf/cm²	$P_{max} = P_u$ tf	Augmentation de la force de rupture due à l'accroissement de l'épaisseur de l'âme ΔP_u tf	$\frac{P_u}{b_0}$ kgf/cm
$4G_5$	0	8 Ø 31,7		247	48,20	0	
$4G_1$	5,0	8 Ø 31,7		436	98,05	49,85	9970
$4G_{11}$	8,0	8 Ø 31,7	Ø 12,7 mm	390	130,75	82,55	10320
$4G_3$	10,4	8 Ø 31,7	$t = 10,2$ cm	404	143,35	95,15	9150
$4G_6$	15,1	10 Ø 31,7		402	178,85	130,65	8650
$4G_8$	21,2	12 Ø 31,7		401	195,75	147,55	6960

nous montre les résultats des essais effectués sur des poutres en béton de résistance semblable avec des âmes d'épaisseur différente. Les poutres étaient armées par des étriers de Ø 12,7 mm, écartés de 10,2 cm.

La relation entre la capacité portante, la résistance du béton et le volume de l'armature transversale est indiquée sur la figure 5-44. Nous voyons que la capacité portante des poutres n'augmente que peu avec l'accroissement des diamètres des étriers lorsque leur écartement reste constant. Cette augmentation de la capacité portante est d'autant plus petite que la résistance du béton est plus faible.

Le rappel des principaux résultats des essais, indiqués sur la figure 5-45, nous enseigne que les meilleurs effets ont été obtenus avec les étriers inclinés à 45° (fig. 5-43e). Les étriers supplémentaires dirigés suivant les contraintes principales de compression (fig. 5-43f) n'ont pas augmenté la capacité portante et, même, on a observé une certaine diminution de cette capacité, compte tenu de la quantité d'acier utilisée par rapport à celle d'un système simple d'étriers inclinés. L'armature composée d'étriers horizontaux (fig. 5-43c) a eu des effets défavorables ; c'est-à-dire non seulement la capacité portante n'était pas supérieure,

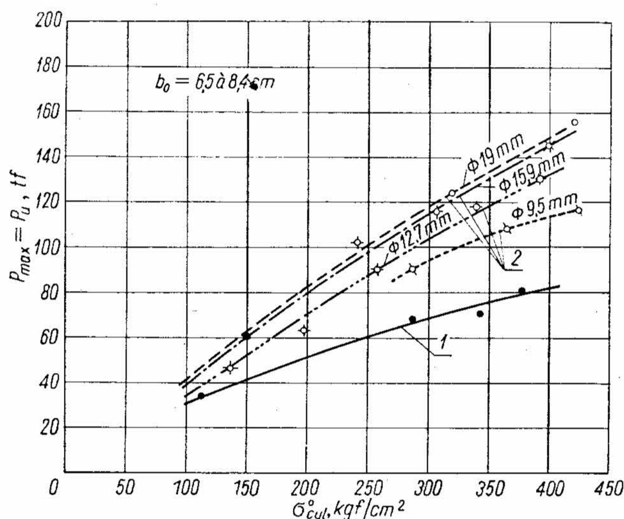


Fig. 5-44. Relation entre la capacité portante de la poutre, la résistance du béton et la quantité d'armature transversale, d'après les essais américains [77]

1 — poutre sans armature transversale, 2 — poutre avec des étriers verticaux

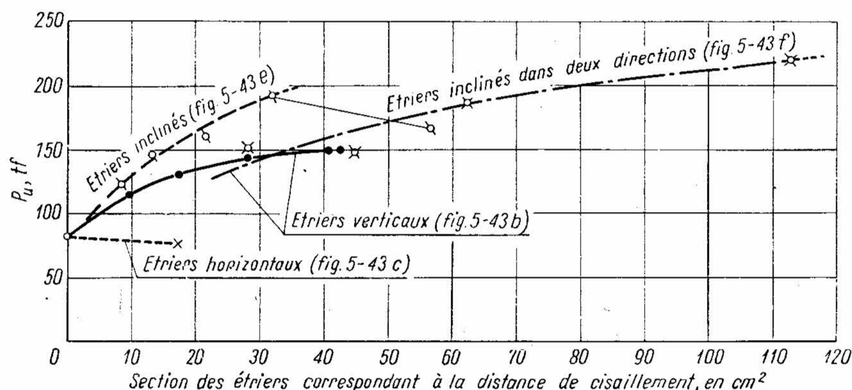


Fig. 5-45. Résultats des essais de l'efficacité des différents types d'armature transversale en forme d'étriers [77]

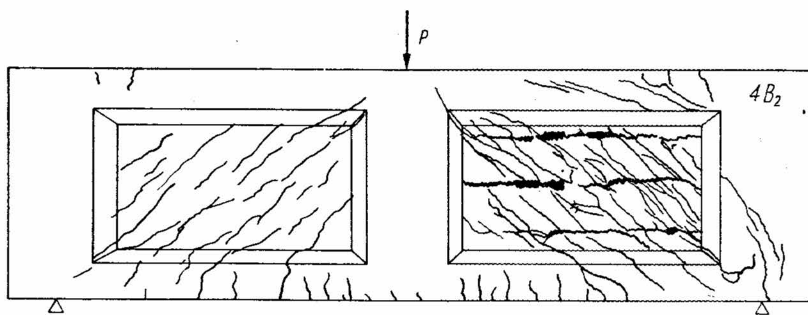


Fig. 5-46. Fissuration de la poutre dont l'armature est représentée sur la figure 5-43d

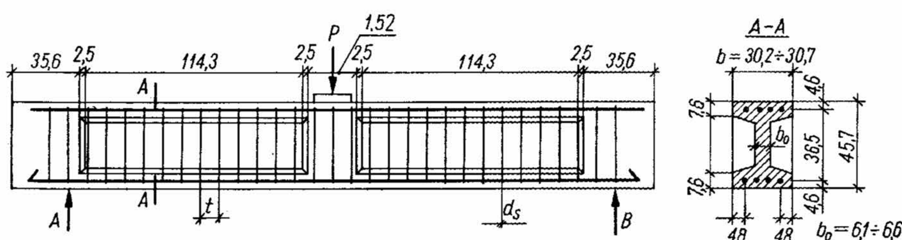


Fig. 5-47. Poutre en forme de T munie d'étriers en barres de diamètres différents [77]

mais elle était inférieure par rapport aux poutres avec des âmes sans armature. Les poutres munies simultanément d'étriers verticaux et horizontaux (fig. 5-43d) ont montré une capacité portante d'autant plus faible que le diamètre des étriers horizontaux dans l'âme était plus grand. Ceci prouve qu'on ne peut pas remplacer l'armature suivant les lignes de force par une armature orthogonale sans provoquer des effets défavorables tels que l'accélération de la fissuration et de la rupture.

La figure 5-46 représente la disposition des fissures d'une poutre en béton armé montrée précédemment par la figure 5-43d ; le rôle destructif des barres horizontales est bien visible.

Dans les poutres en forme de T exécutées en béton de résistance 300 kgf/cm² environ et dont la forme et l'armature sont représentées sur la figure 5-47, les étriers en barres de diamètres différents étaient conçus d'une telle manière que la section des étriers rapportée à l'unité de longueur de la poutre fût constante. Cette série de poutres composée de quatre éléments a montré la diminution de la capacité portante avec l'augmentation du diamètre des étriers.

Les contraintes dans les armatures principales déterminées par les mesures étaient

$$\sigma_z = 0{,}67 \text{ à } 1{,}19\ Q'_a, \quad \text{en moyenne } 0{,}95\ Q'_a,$$

en fonction de la qualité du béton, du diamètre des barres et du type d'ancrage. Les contraintes dans les étriers étaient

$$\sigma_z = 0{,}45 \text{ à } 0{,}97\ Q'_a, \quad \text{en moyenne } 0{,}72\ Q'_a.$$

Ainsi, nous voyons que les contraintes maximales dans les étriers n'ont pas atteint la limite d'élasticité de l'acier et, en général, elles étaient nettement inférieures aux valeurs calculées. On peut expliquer ce phénomène, entre autres, par le fait que la base de mesure était trop grande pour qu'on puisse observer les contraintes maximales effectives dans les étriers, apparues sur les segments correspondant à l'ouverture d'une fissure oblique.

5.3.3. ESSAIS DE RICHART ET LARSON

Les essais [68] ont été réalisés avec la coopération de TALBOT, ABRAMS, SLATER, GONNERMANN et BRAUN.

La figure 5-48 montre quelques types des poutres examinées en 1911 (Bulletin No 166). Les poutres étaient armées transversalement de façon très diverse. L'analyse de la résistance de ces poutres ainsi que les conclusions sur l'efficacité des divers types d'armature transversale sont impossibles à formuler, car il manque des données précises sur la résis-

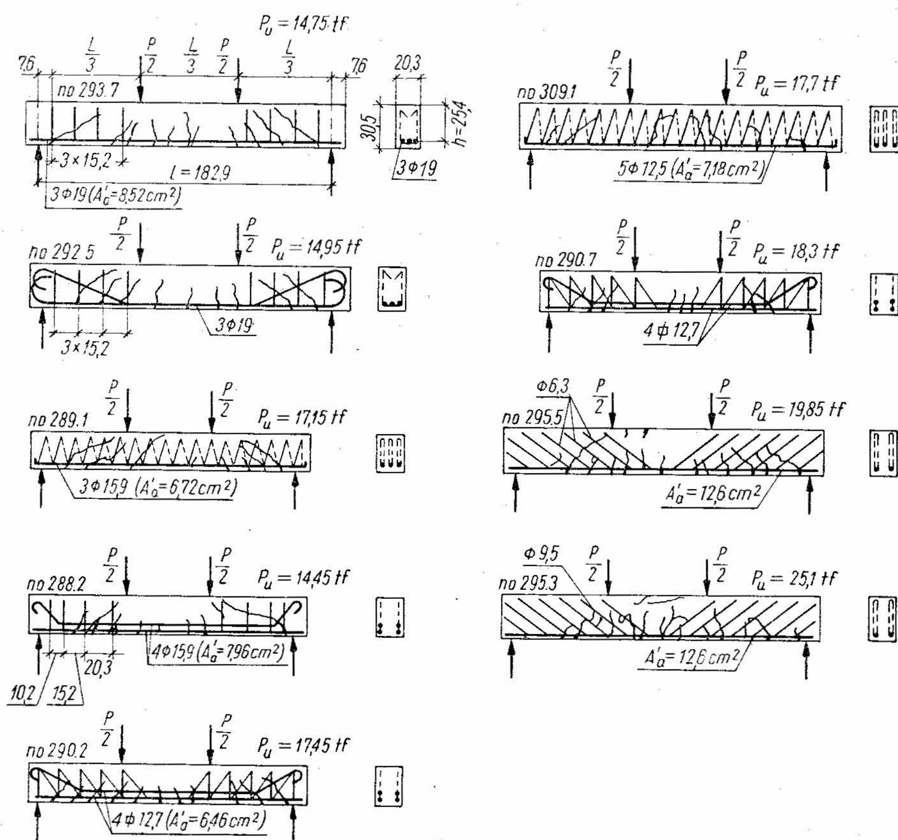


Fig. 5-48. Poutres à armatures transversales différentes, examinées en 1911 [68]

tance du béton à la compression — seule la résistance à la traction par flexion pouvait être déterminée. De plus, presque toutes les poutres ont été rompues par flexion après avoir atteint la contrainte $\sigma_a = Q'_a$ au centre de la travée.

Les poutres examinées en 1913 sont représentées par la figure 5-49. Elles ont été exécutées en béton de résistance 170 kgf/cm² environ, avec une armature composée de barres de Ø 19 mm, en acier ordinaire de limite d'élasticité $Q'_a = 2900$ kgf/cm² environ. Les plus importants résultats de ces essais sont rassemblés dans le tableau 5-7.

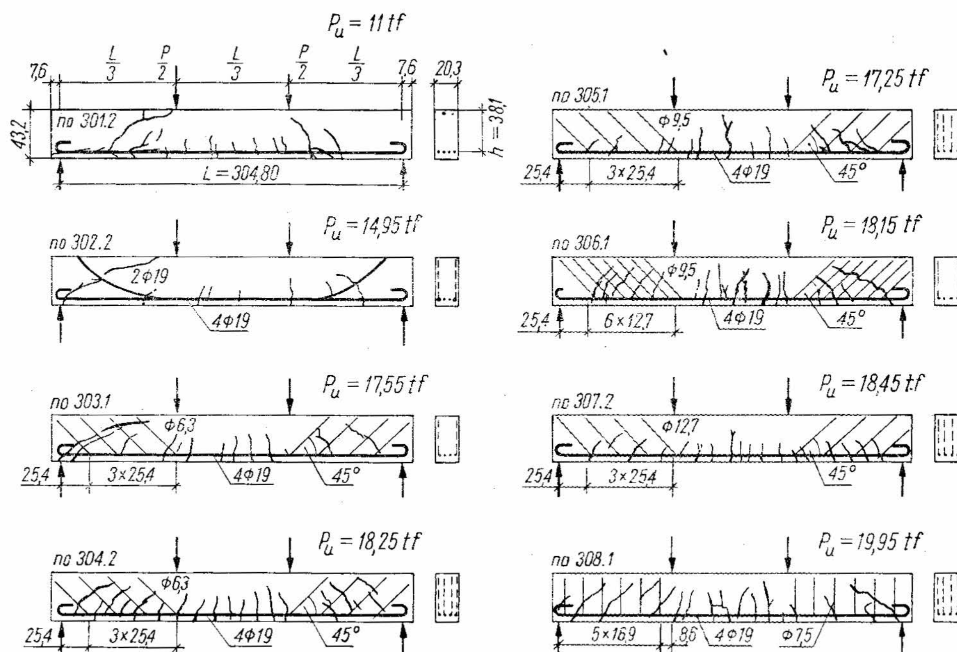


Fig. 5-49. Poutres étudiées par RICHART et LARSON en 1913 [68]

Le tableau 5-7 nous enseigne que dans les poutres sans armature transversale (poutres Nos 301.1 et 301.2) ainsi que dans les poutres avec une armature transversale faible (poutres Nos 302 et 303) la limite de résistance à la flexion n'a pas été atteinte et ces poutres ont été rompues par les fissures obliques dues au glissement de l'armature dans l'ancrage. Dans la poutre No 303.1 la limite de résistance à la flexion aurait été bientôt atteinte — cela est démontré par la valeur de la force de rupture P_u très proche de la valeur de P_{max} pour la flexion pure. Dans la poutre No 303.1 où le cisaillement n'était que partiellement transmis par l'armature, les contraintes calculées dans les étriers obliques au moment de la rupture étaient égales à 8200 kgf/cm², donc environ 2,8 fois plus fortes que la limite d'élasticité déterminée dans ces armatures. Cela prouve que dans la poutre le schéma d'une triangulation a eu une influence primordiale sur la résistance à la flexion. Dans ce schéma la résultante des contraintes de compression N_b est inclinée par rapport à l'axe de la poutre et elle transmet une partie importante de l'effort tranchant. Par conséquent, le calcul des

TABLEAU 5-7

Poutre	Résistance du béton sur cubes 15,2×15,2 cm		Résistance du béton à la traction par flexion	Age du béton des poutres	P_u	τ_n	Cause de la rupture
	âge du béton	σ_{wu} kgf/cm²	σ_0' kgf/cm²		kgf	kgf/cm²	
301.1	256	205	18	225	11 300	9,2	fissure oblique
301.2	249	—	18	315	11 000	9,0	
302.1	68	141	—	73	15 350	12,3	glissement des barres relevées
302.2	106	184	—	84	14 950	12,0	
303.1	307	205	14	238	17 550	14,0	fissure oblique
304.1	256	179	12	225	17 900	14,3	limite Q_a' atteinte dans l'armature principale au centre de la travée
304.2	263	157	17	225	18 250	14,6	
305.1	86	171	—	120	17 250	13,8	
305.2	100	129	—	90	18 150	14,5	
306.1	307	172	15	235	18 150	14,5	
306.2	298	179	13	234	16 150	13,0	
307.2	262	165	16	227	18 450	14,7	
308.1	78	191	—	80	19 950	15,9	
308.2	—	—	—	286	20 250	16,1	

contraintes dans les étriers par la méthode classique donne des valeurs trop élevées. Dans le cas cité la partie de l'effort tranchant correspondant au béton était importante vu le petit élancement de cisaillement, d'où l'inclinaison considérable de N_b. Cela a rendu possible le schéma d'un arc avec tirant, étant donné que toutes les armatures principales étaient conduites jusqu'à l'appui et y étaient bien ancrées.

Egalement dans les deux poutres No 304 où l'on a mis deux fois plus d'armature transversale (étriers de Ø 6,3 mm) que dans la poutre No 303, les contraintes calculées dans les étriers sont égales à 4200 kgf/cm² ; donc elles dépassent 1,5 fois la valeur $Q_a' = 2920$ kgf/cm². Comme nous le voyons, dans ces deux cas la méthode classique indique des contraintes de calcul dans les étriers trop élevées. Les différences entre celles-ci et les contraintes effectives sont d'autant plus grandes que l'armature transversale est plus faible.

La figure 5-50 indique les contraintes mesurées dans les étriers de la poutre No 304.2 sous des charges produisant des contraintes de cisaillement de calcul $\tau = 8{,}4$, 11,2 et 13,9 kgf/cm². Il est à remarquer que les différences entre les valeurs de calcul et les valeurs effectives sont d'autant plus importantes que la contrainte τ est plus petite.

Dans le compte rendu des études expérimentales effectuées en 1917 nous rencontrons les résultats des essais sur des poutres en béton armé à une travée et de section rectangulaire. Initialement ces forces étaient écartées de $l_1 = 45{,}7$ cm, mais au moment où commençait la rupture par flexion les forces étaient déplacées vers les appuis et l'écartement augmentait pour atteindre $l_2 = 106{,}7$ cm (fig. 5-51). Dans le cas de l'écartement l_1 les poutres armées par des barres relevées ont été rompues quand les contraintes dans les armatures principales ont atteint la limite d'élasticité au centre de la travée. Parfois, ce type de rupture a eu lieu également dans le cas de l'écartement l_2; toutefois dans cette deuxième disposition des forces on a noté souvent le glissement des armatures principales dans les ancrages. Dans ces circonstances, malgré le fait que les essais comportaient des poutres munies de barres relevées à divers angles (45°, 35° et 28°) il est difficile de formuler des conclusions concernant l'efficacité de l'armature transversale.

En étudiant les contraintes dans les barres relevées RICHART a constaté que les contraintes effectives σ_{te} correspondent de 0,26 à 0,86 des valeurs σ_{te} calculées d'après la méthode classique de MÖRSCH. Les valeurs moyennes des contraintes dans les barres relevées, trouvées par RICHART dans ses 34 essais, sont représentées sur la figure 5-52.

Les essais ont été également effectués sur 12 poutres de section rectangulaire ainsi que de section en forme de T, armées transversalement par des étriers verticaux. Ces poutres ont été exécutées en béton de résistance de 250 à 300 kgf/cm² et la plupart d'entre elles ont été rompues par flexion. En conséquence, sur la base de ces essais on ne peut dire que très peu sur l'efficacité de l'armature orthogonale. Par contre, les résultats des mesures de déformation des armatures principales sont intéressants. Ces résultats exprimés en valeurs

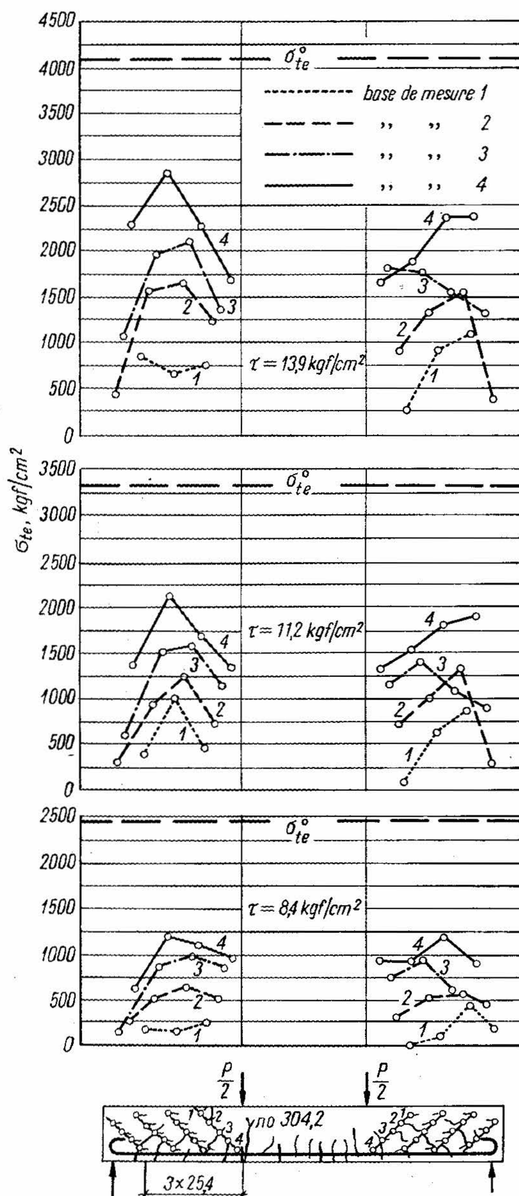


Fig. 5-50. Contraintes effectives et calculées des étriers dans la poutre No 304.2 d'après les essais [68]

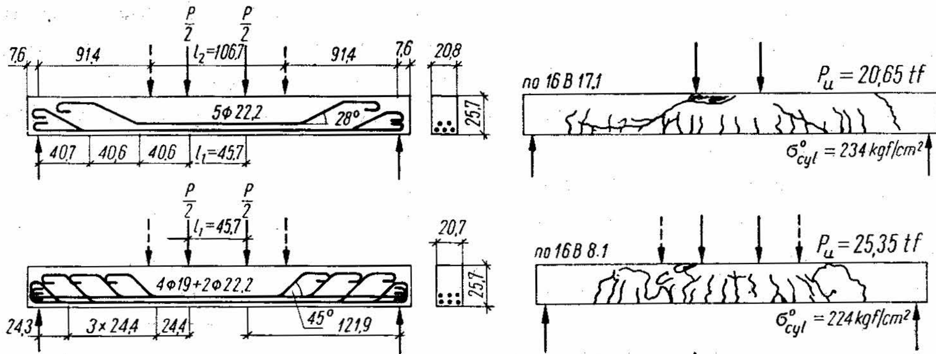


Fig. 5-51. Poutres dans les essais de RICHART et LARSON en 1917 [68]

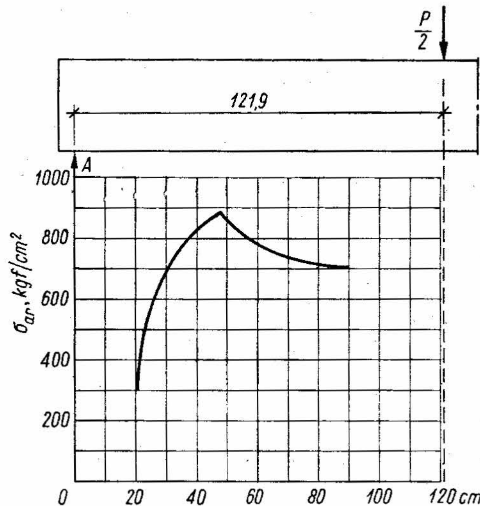


Fig. 5-52. Valeurs moyennes des contraintes dans les barres relevées en fonction de la distance à l'appui *A* (d'après les essais de RICHART pour P = 13,6 tf)

des contraintes sont indiqués sur l'exemple de la poutre No 224.1 (fig. 5-53). Il est à remarquer que les contraintes des armatures principales déterminées par les mesures ne concordent avec les valeurs théoriques que suivant le segment où le moment fléchissant était constant. Par contre, ces contraintes sont très supérieures dans la zone de cisaillement et la différence avec les valeurs calculées augmente à mesure que l'accroissement de la charge fait approcher celle-ci de la charge de rupture.

Une série ultérieure des essais effectués en 1917 à l'Université d'Urbana (U.S.A.) comportait l'examen de poutres isostatiques à deux consoles, chargées par quatre forces

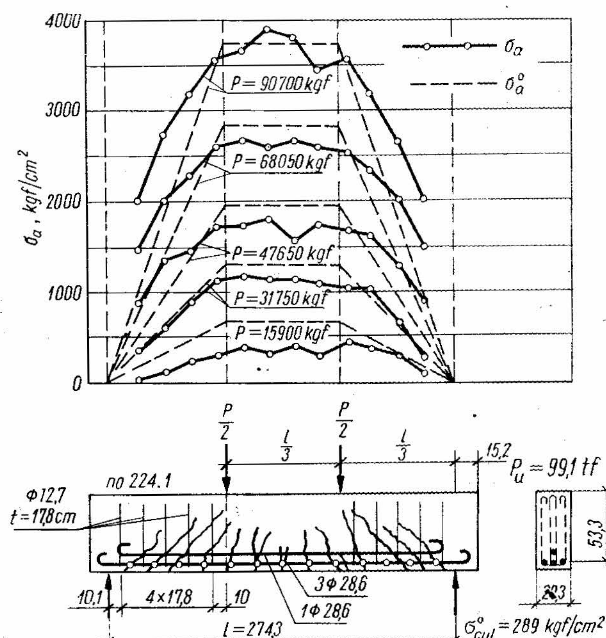


Fig. 5-53. Contraintes calculées et effectives dans l'armature principale dans la poutre No 224.1 [68]

concentrées. Ces poutres de section rectangulaire étaient réalisées en béton de résistance 200 kgf/cm² et étaient munies d'une armature transversale à barres relevées, à l'exception de deux poutres No 380. Comme but principal des essais on s'est assigné d'observer le comportement des zones d'appui des poutres où les moments fléchissants M_{max} et les efforts tranchants T_{max} intervenaient simultanément. La figure 5-54 ne représente que quelques types de poûtres de cette série. Comme il était à prévoir, ce sont les poutres No 380.1 et 380.2, (fig. 5-54a) rompues pour $\tau_n = 19$ kgf/cm² qui ont fait preuve de la capacité portante minimale. La poutre No 400.1 (fig. 5-54b) était munie d'un nombre suffisant de barres relevées à 22° (4 Ø 15,9 mm), mais celles-ci étaient disposées de manière incorrecte et, par conséquent, la limite de la capacité portante a été atteinte déjà sous la contrainte $\tau_n \approx 27,5$ kgf/cm². Une capacité portante beaucoup plus élevée a été constatée dans les poutres No 386 (fig. 5-54c) dans lesquelles six barres de diamètre Ø 15,9 mm étaient relevées à 32,5° dans deux plans ($\tau_{n\,moy} = 34,2$ kgf/cm²), ainsi que dans les poutres No 390 munies de huit barres de 15,9 mm relevées dans quatre plans ($\tau_{n\,moy} = 33,4$ kgf/cm²). Il est à souligner que la consommation d'acier a été presque identique dans ces poutres malgré le nombre variable de barres relevées.

La comparaison des résultats des essais concernant les poutres No 386 et 390 met en évidence que dans ce cas les barres relevées à 32,5° ont été plus efficaces que les barres relevées à 45°.

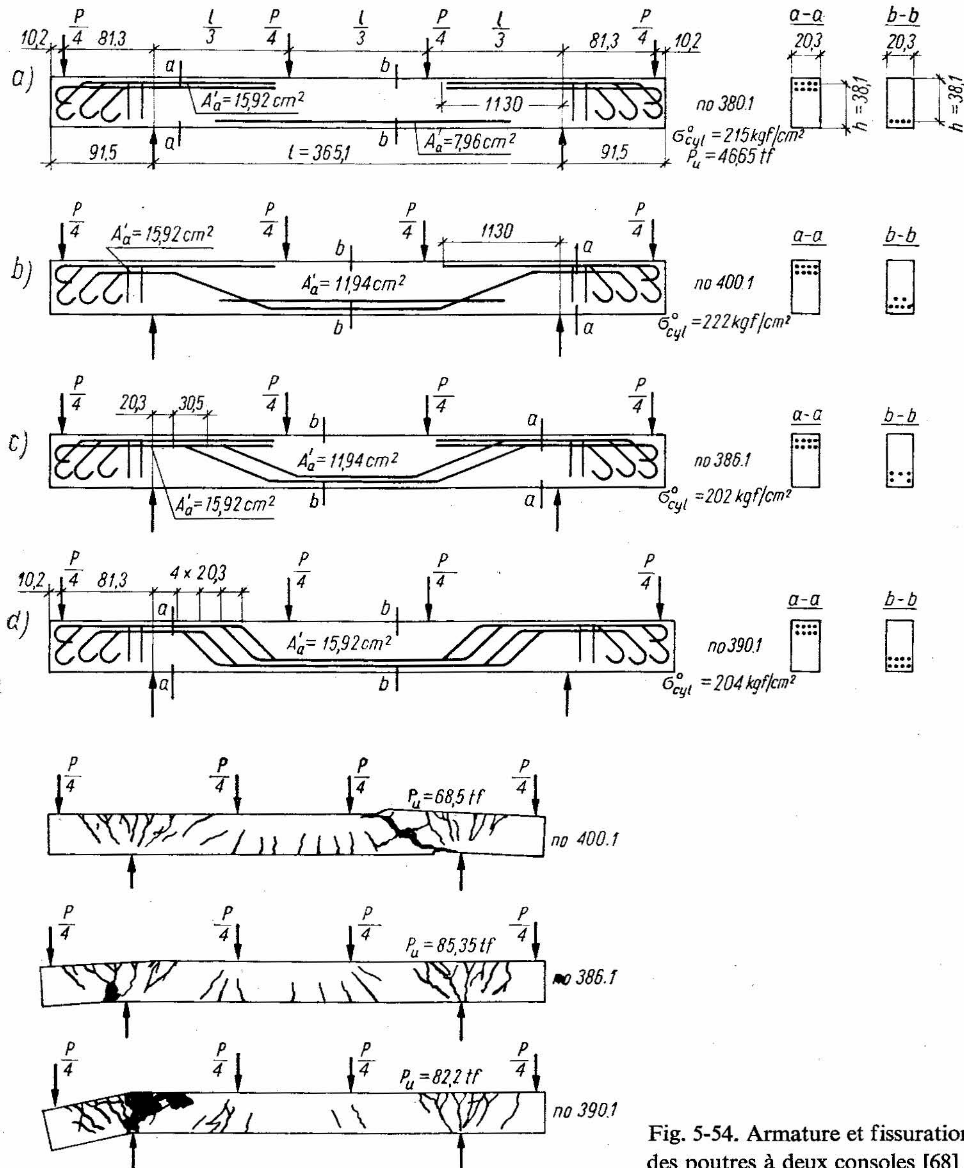


Fig. 5-54. Armature et fissuration des poutres à deux consoles [68]

5.3.4. LES ESSAIS DE MORETTO

Les essais américains dans le domaine du cisaillement ont été repris après la deuxième guerre mondiale et ce domaine contient jusqu'à aujourd'hui les problèmes les plus discutables. La reprise intensive des essais américains a été provoquée par les nombreux accidents dus au libéralisme des prescriptions réglementaires concernant le dimensionnement des

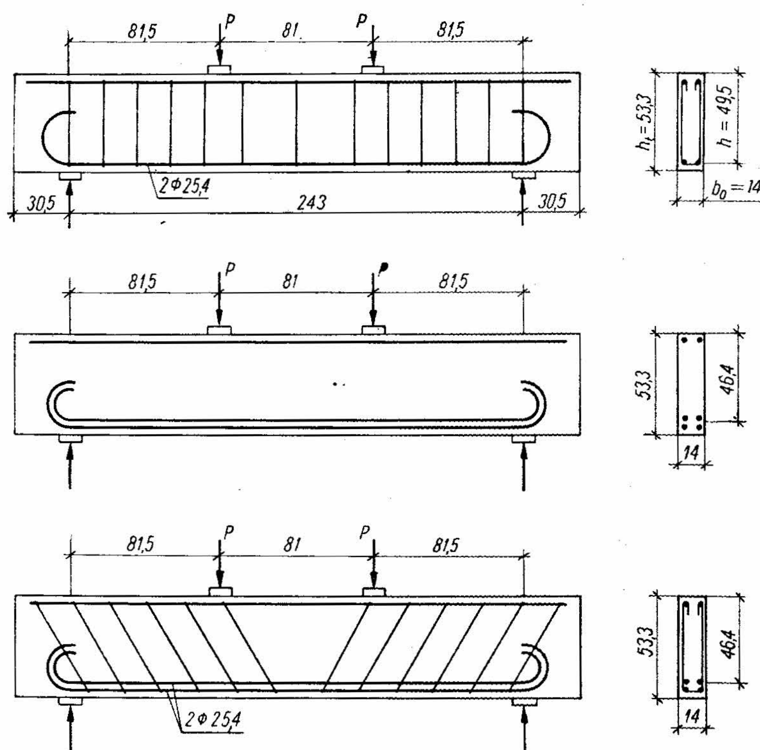


Fig. 5-55. Poutres dans les essais de Moretto [61]

éléments en béton armé. Ces prescriptions sont en effet beaucoup plus libérales en Amérique qu'en Europe. En 1945, Moretto [61] a publié les résultats de ses essais sur 44 poutres dont les dimensions et l'armature sont représentées sur la figure 5-55. La résistance du béton de ces poutres ainsi que le nombre et l'inclinaison des étriers étaient différents ; les étriers étaient soudés aux armatures longitudinales supérieures et inférieures. Les déformations des étriers ont été mesurées par des jauges en divers points. 32 poutres parmi ces 44 se sont rompues dans la zone de cisaillement par rupture du béton au-dessus de la fissure oblique.

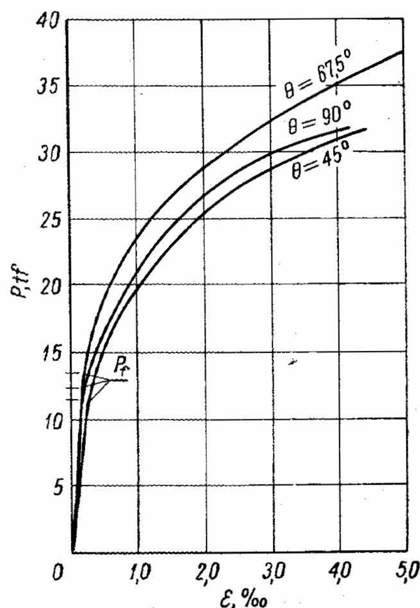


Fig. 5-56. Capacité portante au cisaillement en fonction de l'angle θ d'inclinaison des étriers [61]

Les résultats des essais de Moretto sont indiqués sur la figure 5-56 ; ils concernent la capacité portante des poutres par rapport au cisaillement en fonction de l'angle θ d'inclinaison des étriers. Les charges de rupture et les déformations unitaires des étriers sont calculées comme moyennes des quatre poutres.

D'après la figure 5-56 il résulte que la capacité portante maximale dans le cas des étriers soudés aux armatures longitudinales correspond à l'angle $\theta = 67{,}5°$ d'inclinaison des étriers. La comparaison entre les résultats des essais de Moretto et ceux des essais américains précédents permet de constater que, par le soudage des étriers aux barres longitudinales, on augmente de 20 % environ la capacité portante de la zone de cisaillement.

5.3.5. ESSAIS DE LEONHARDT ET WALTHER

La figure 5-57 représente 18 poutres en béton armé examinées à l'Institut de O. Graf, à Stuttgart. Les résultats de ces essais ont été publiés en 1963 dans DAfSt[1]), cahier 156 [53]. Les poutres en forme de T avec $\frac{b_1}{b_0} = \frac{96}{16} = 6$ étaient chargées symétriquement par deux forces concentrées, situées à la distance $a = 125$ cm de l'appui (à l'exception de la poutre *TA*1 avec $a = 112{,}5$ cm), d'où le rapport $\frac{M}{Th} = \frac{125}{37{,}5} = 3{,}33$ était plus défavorable. Les sections transversales et le pourcentage de l'armature longitudinale ($\overline{\omega} = 0{,}73\ \%$) étaient identiques dans toutes les poutres. Ce qui variait, c'était le coefficient exprimant la mesure dans laquelle le cisaillement était transmis par l'armature. L'armature complète pour le cisaillement ($\eta = 1{,}0$) indique que dans la poutre en question l'armature est suffisante pour transmettre l'effort tranchant entier $T = \int \tau_0 b_0 \mathrm{d}x$, où τ_0 est la contrainte de cisaillement due à la charge d'exploitation calculée d'après la méthode de la capacité portante limite avec un coefficient de sécurité $s = 1{,}75$.

Dans la série de poutres *I* à *III* les diamètres des étriers étaient variables de Ø 12 mm à Ø 6 mm, leur écartement 11,3 cm demeurait constant. L'armature transversale de la *IV*-ième série de poutres se composait d'étriers et de barres relevées, transmettant entièrement le cisaillement, $\eta = 1{,}0$.

Dans la poutre *TA*6 de la série *V* on a employé, outre les étriers de Ø 8 mm ($\eta = 0{,}47$), des étriers horizontaux supplémentaires, 4 Ø 8, mm au niveau de l'âme. Dans la poutre *TA*16, en plus des étriers de Ø 8 mm, écartés de 11,3 cm, l'armature principale se trouvait renforcée par de petits étriers additionnels, également tous les 11,3 cm. C'est une méthode employée souvent en France et préconisée surtout par J.R. Robinson [70]. Les deux dernières poutres *TA*7 et *TA*8 avaient leur armature principale partiellement réduite dans la travée (fig. 5-57). Toutes les poutres étaient armées avec des barres crénelées Tor Stahl de $Q_a' \approx 4000$ kgf/cm^2.

La figure 5-58 indique les valeurs des forces de rupture en fonction du coefficient η. La poutre *TA*8 a montré la capacité portante la plus basse, égale à 45,3 tf ; dans cette poutre l'armature transversale correspondait à 47 % de cisaillement et les armatures principales

[1]) DAfSt — Deutscher Ausschuss für Stahlbeton.

SÉRIE I, $\sigma_{wu} = 225$

TA1 étriers $\phi 12$
TA2 ,, $\phi 10$
TA3 ,, $\phi 8$
TA4 ,, $\phi 6$

SÉRIE II, $\sigma_{wu} = 225$

TA13 étriers $\phi 12$
TA14 ,, $\phi 10$
TA15 ,, $\phi 8$

SÉRIE III, $\sigma_{wu} = 300$

TA9 étriers $\phi 12$
TA10 ,, $\phi 10$
TA11 ,, $\phi 8$
TA12 ,, $\phi 6$

SÉRIE IV, $\sigma_{wu} = 225$

TA5 $3\phi 24$

TA17, $\sigma_{wu} = 225$

$3\phi 24$
+ étriers $\phi 8$

TA18, $\sigma_{wu} = 300$

$3\phi 24$
+ étriers $\phi 8$

SÉRIE V, $\sigma_{wu} = 225$

TA6 étriers $\phi 8$
+ étriers horizontaux

TA16 étriers $\phi 8$
+ étriers supplémentaires dans la membrure tendue

TA7 étriers $\phi 12$ et armature principale coupée conformément au diagramme de $M(x)$

TA8 comme TA7 mais étriers $\phi 8$

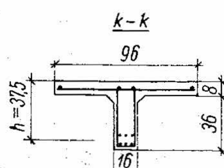


Fig. 5-57. Poutres en forme de double T dans les essais de LEONHARDT et WALTHER [53] (DAfSt, cahier 156)

étaient coupées conformément au diagramme des moments fléchissants, avec un surplus de 26 Ø de longueur au-delà du point d'appui théorique de la poutre. Des comptes rendus des essais il résulte que la rupture de cette poutre a été causée par la rupture de l'âme où s'est produit un glissement de l'armature principale et aussi des déformations excessives des étriers.

Dans la poutre *TA*7 avec l'armature transversale complète (η = 1,03) et l'armature principale identique à celle de la poutre *TA*8, le glissement de l'armature principale a été la principale cause de la rupture. La section transversale des étriers, presque deux fois plus grande, n'a aidé que très peu. La force de rupture était égale à 54,6 tf et supérieure à peine de 20 % par rapport à celle de la poutre *TA*8, tandis que la résistance de la poutre à la flexion était égale à 70 tf environ. On n'a atteint la limite de cette résistance, avec du béton de 200 kgf/cm² de résistance environ, que dans la poutre *TA*13 où toutes les armatures atteignaient l'appui et étaient fortement ancrées, la section transversale des étriers (η = 1,03) étant conforme aux indications de Mörsch.

Dans la poutre *TA*15 avec les barres bien ancrées au-dessus de l'appui et avec une armature transversale correspondant à 47 % (η = 0,47), on a obtenu une force de rupture relativement élevée et égale à P_u = 59,6 tf. Cependant, la rupture a eu lieu dans la zone de cisaillement et non dans la zone du moment fléchissant maximal, donc comme dans toutes les poutres en béton de résistance de 200 kgf/cm² environ et avec une armature transversale incomplète. Ce n'est que dans les poutres en béton de résistance supérieure à 300 kgf/cm² (la poutre *TA*10) et avec une armature transversale correspondant à η = 0,67 que la limite de la résistance à la flexion a été atteinte, étant donné le moment fléchissant, et la force P_u a atteint la valeur de 71,4 tf. Avec σ^0_{cyl} = 300 kgf/cm² et η = 0,47 (la poutre *Ta*11) la force de rupture était aussi voisine de la force de rupture par flexion et elle était égale à 68,4 tf.

Les résultats des essais susdits confirment la conclusion précédemment formulée, et notamment on en déduit que les poutres en béton de faible résistance supportent moins bien l'action simultanée du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

Les résultats des essais de la poutre *TA*6 méritent une attention toute particulière, car cette poutre était munie

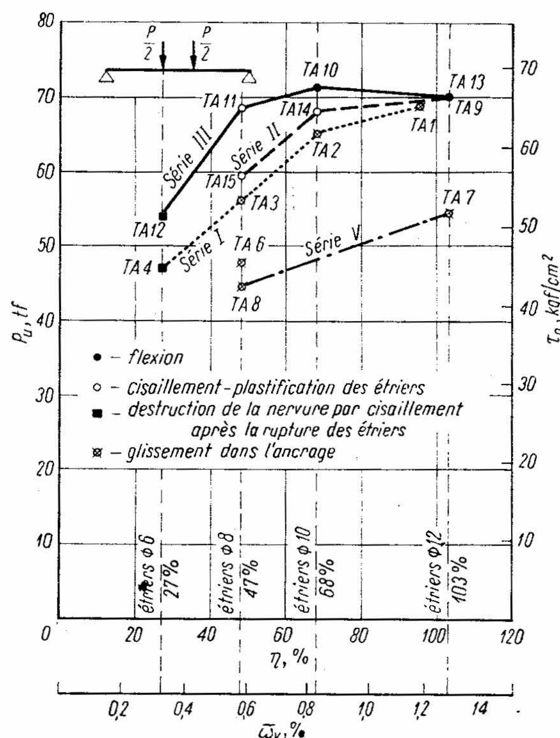


Fig. 5-58. Capacité portante au cisaillement en fonction du pourcentage de l'armature transversale [53]

d'une armature horizontale supplémentaire dans la nervure (4 Ø 8 mm) sur toute la longueur de la travée.

RAUSCH dans l'ouvrage [66] suppose l'application de l'effort $N_w = T$ à mi-hauteur de la section dans les poutres dont l'armature transversale est composée exclusivement d'étriers verticaux (fig. 5-59). D'après RAUSCH, pour que l'égalité $N'_{ax} = N_{bx}$ soit maintenue il faut transmettre cet effort par les barres horizontales de l'armature orthogonale, car après l'ouverture d'une fissure oblique la déformation prend la forme indiquée sur la figure 5-60.

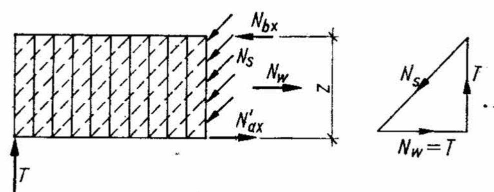


Fig. 5-59. Schéma simplifié des efforts internes dans une poutre munie d'une armature orthogonale d'après RAUSCH [66]

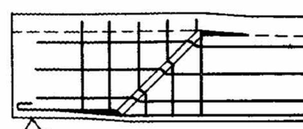


Fig. 5-60. Schéma des déplacements dans la zone d'une fissure oblique d'après RAUSCH [66]

Cela signifie une décomposition de l'effort oblique en deux composantes, horizontale et verticale, de valeur identique. En supposant valable le schéma de RAUSCH on pourrait prévoir une augmentation de la capacité portante au cisaillement grâce à l'emploi de barres horizontales supplémentaires. Or, des essais [53] et des essais américains antérieurs [77], il résulte que les armatures supplémentaires horizontales disposées sur la hauteur d'une nervure diminuent la capacité portante d'une poutre (par exemple, pour la poutre *TA6* nous avons $P_u = 47{,}4$ tf, tandis que pour les poutres correspondantes *TA3* et *TA15* sans étriers horizontaux on a respectivement $P_u = 55{,}5$ tf et 59,6 tf, fig. 5-58). Les mesures ont indiqué que les contraintes dans les barres horizontales supplémentaires dans la nervure de la poutre *TA6* ont atteint la valeur de 1200 kgf/cm^2 environ sous une charge $P_u = 40$ tf. Cependant, malgré la transmission d'une partie des efforts de traction par ces barres, le rôle de celles-ci a été destructif pour le béton de la nervure. En conséquence, on a observé non seulement une diminution de la capacité portante mais également l'accroissement de l'ouverture des fissures obliques dans la poutre *TA6*.

La figure 5-61 montre les déplacements horizontaux et verticaux des bords des fissures obliques en fonction de la charge. Les diagrammes indiquent qu'avec l'armature orthogonale les déplacements verticaux sont plusieurs fois supérieurs aux déplacements horizontaux. Or, RAUSCH a supposé que l'ouverture d'une fissure oblique était perpendiculaire au plan incliné à 45° par rapport à l'axe de la poutre et il préconisait l'emploi d'une armature orthogonale dans la nervure. Il en résulte, par conséquent, que malgré les suppositions de certains chercheurs français et américains, on ne peut pas remplacer avec la même efficacité une armature suivant les lignes de force par une armature orthogonale.

Toutes les poutres avec les barres relevées (série *IV*) avaient une armature transversale complète ($\eta = 1{,}03$). Toutefois, la capacité portante prévue ($P_u = 70{,}9$ tf) et la rupture par

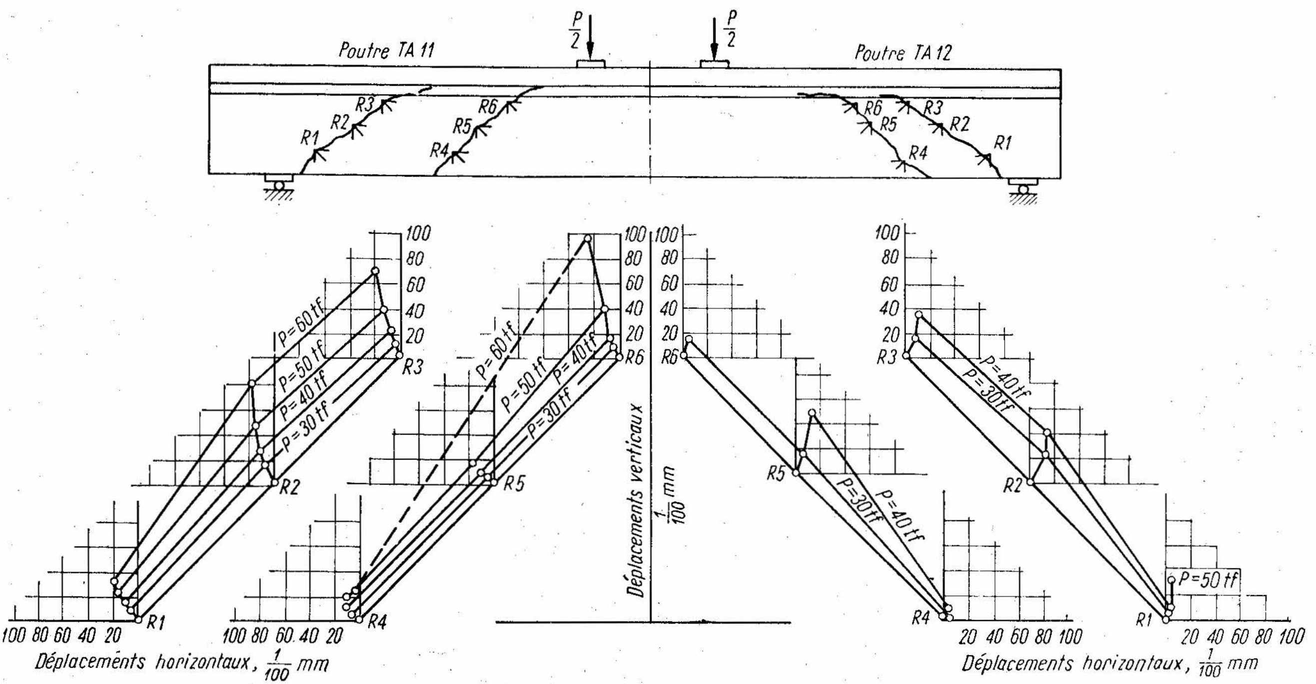


Fig. 5-61. Déplacements des bords des fissures obliques d'après les essais de LEONHARDT et WALTHER [53]

flexion ont été obtenues seulement dans la poutre *TA*18 réalisée en béton de résistance $\sigma_{wu} = 300$ kgf/cm². Dans les deux autres poutres en béton de $\sigma^0_{cyl} = 225$ kgf/cm² la rupture était produite par l'écrasement du béton dans les courbures des armatures principales. La poutre *TA*17, avec le rayon de courbure $R = 18\ d$, a été rompue sous la charge $P_u = 69$ tf, tandis que la poutre *TA*5, avec le rayon $R = 7{,}5\ d$ l'a été sous la charge $P_u = 46{,}2$ tf. Nous voyons donc qu'une forte courbure des armatures peut, dans le cas d'une armature transversale complète ($\eta \geqslant 1{,}0$), faire atteindre la limite de résistance de la poutre dans la zone de cisaillement sous une charge beaucoup plus petite que la charge de calcul.

La figure 5-62 représente les contraintes de calcul et les contraintes effectives dans les étriers des poutres *TA*1 à *TA*4. On y voit que les contraintes mesurées (ligne continue) sont environ deux fois plus petites pour la charge d'exploitation que les contraintes de calcul (ligne en traits interrompus). Ces dernières ont été calculées, d'après l'analogie du treillis de MÖRSCH, par la formule $\sigma_{te} = \frac{\tau_0}{\overline{\omega}_v}$. Les contraintes effectives dans les étriers sont voisines des valeurs calculées par la formule empirique

$$\sigma_{te} = \frac{\tau_0 - \tau_{0fis}}{\overline{\omega}_v}, \qquad (5.8)$$

où

$$\tau_0 = \frac{T}{b_0 z}; \ \tau_{0fis} = \frac{1}{20}\sigma_{pr}; \ \overline{\omega}_v = \frac{A'_{af}}{bt\sin\theta}$$

t — espacement entre les étriers,

θ — angle d'inclinaison des étriers par rapport à l'axe de la poutre.

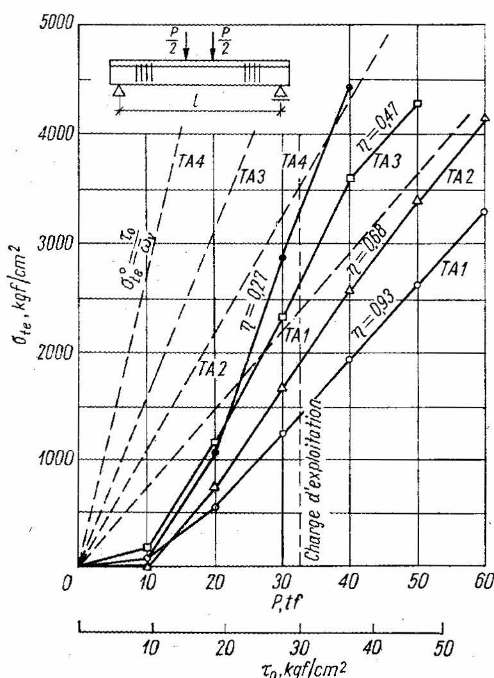


Fig. 5-62. Valeurs des contraintes calculées et mesurées dans les étriers verticaux [53]

D'après la formule (5.8) l'accroissement des contraintes dans les étriers est plus petit que celui calculé par la méthode classique, et cette différence a une valeur constante. Cette constatation est confirmée par les essais [53]. La figure 5-62 représente les diagrammes des contraintes dans les étriers calculés par la méthode classique et obtenus par les mesures des déformations ; ils sont sensiblement parallèles.

Les résultats des essais [53] semblent indiquer qu'avec des étriers plus faibles, les effets selon le schéma d'un arc avec tirant jouent un rôle prépondérant et les effets selon le schéma du treillis fictif deviennent moins importants.

La figure 5-63 représente la répartition des contraintes dans les étriers dans la zone de cisaillement des poutres de la série *I* sous les charges $P = 30$ tf et $P = 50$ tf.

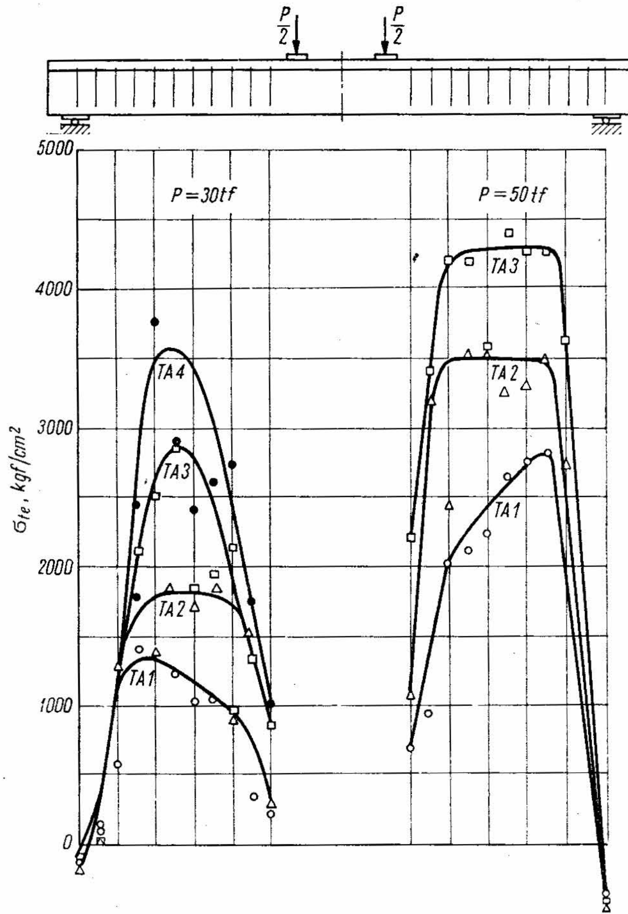


Fig. 5-63. Contraintes σ_{te} dans la zone de cisaillement dans les poutres de la série *I*, d'après les essais [53]

Les efforts de traction dans les étriers ne sont en effet entièrement utilisés qu'à 0,7 h de l'appui, tandis que les étriers au-dessus de l'appui sont comprimés.

Dans le cas des poutres continues les données expérimentales concernant le cisaillement ne sont pas aussi abondantes que dans celui des poutres simplement appuyées. C'est pourquoi les essais [54] méritent une attention particulière. Ils ont été exécutés sur des poutres à deux travées, de section rectangulaire et en forme de T. Les poutres ont été réparties en 5 séries (tabl. 5-8).

Dans la série *HV* composée de 4 poutres de section rectangulaire la longueur d'ancrage des armatures principales dans la zone du moment fléchissant nul était variable. Dans la série *HH* (5 poutres) le rapport $\frac{M}{Th}$ était variable avec des armatures longitudinale et transversale constantes ($\eta = 0{,}39$). Dans la série *HS* (6 poutres) on a adopté comme variables le coefficient η de l'armature transversale et la nature de cette armature (armature

Série	Poutre	Variables fondamentales		Forme et armature des poutres	Portée de la poutre l m	η	Armature principale appui mm	Armature principale travée mm
		Longueur d'ancrage						
		a_0 cm	a_u cm					
HV					2,50			
	0	31	16			—	2 Ø 26	2 Ø 26
	1	19	10			—	5 Ø 16	5 Ø 16
	2	19	—			—	5 Ø 16	5 Ø 16
	3	—	—			—	5 Ø 16	5 Ø 16
		Portée de la poutre l m	Elancement de cisaillement $\frac{M}{Th}$					
HH	1	1,11	1,12		1,1		2 Ø 14	
	2	1,57	1,58		1,57		3 Ø 14	
	3	2,11	2,13		2,11	0,39	4 Ø 14	
	4	2,57	2,60		2,57		5 Ø 14	
	5	3,00	3,04		3,00		6 Ø 14	
		Etriers						
		Ø mm	t cm					
HS	1	Ø 10	7,5			1,10	4 Ø 18	4 Ø 16
	2	Ø 10	11,0		2,50	0,76	4 Ø 18	4 Ø 16
	3	Ø 8	11,0			0,49	4 Ø 18	4 Ø 16
	4	Ø 8	11,0			0,28	4 Ø 18	4 Ø 16
	5	Ø 16 + étriers				0,77	2 Ø 16 + +2 Ø 20	4 Ø 16
	6	Ø 14 + étriers				0,36	2 Ø 14 + +2 Ø 22	2 Ø 14 + +2 Ø 18
HQ	1	section rectangulaire $b/h_t = 30/35$			2,50	0,80 environ	4 Ø 18	4 Ø 16
	2	section T $b_0 = 10$ cm						
	3	section ⊥ $b_0 = 10$ cm						
		$\overline{\omega}_{appui}$ %	$\overline{\omega}_{trav\acute{e}e}$ %					
HL	1	0,58	0,49		2,50	0,72	6 Ø 8	5 Ø 8
	2	1,29	1,07				6 Ø 12	5 Ø 12
	3	1,76	1,47				6 Ø 14	5 Ø 14
	4	2,92	2,44				6 Ø 18	5 Ø 18

orthogonale dans 4 poutres et armature suivant les lignes de force dans 2 poutres). Les poutres dans la série *HQ* se caractérisaient par différentes formes des sections transversales, et dans la série *HL* par divers pourcentages de l'armature longitudinale. La résistance moyenne du béton dans les cinq séries était égale à 350 kgf/cm² environ.

Dans la série *HV*, on a observé un glissement de l'armature principale près du bord supérieur dans une seule poutre *HV*1, où 2 des 5 barres de Ø 16 mm ont été arrêtées à 19 cm (12 Ø) au-delà du point correspondant au moment fléchissant nul. Dans les essais on a mesuré les réactions des appuis qui, en tenant compte que $EJ = C^{te}$, devaient avoir les valeurs :

$$\text{appui à l'extrémité } A = \frac{5}{16} P,$$

$$\text{appui central} \quad B = \frac{11}{8} P.$$

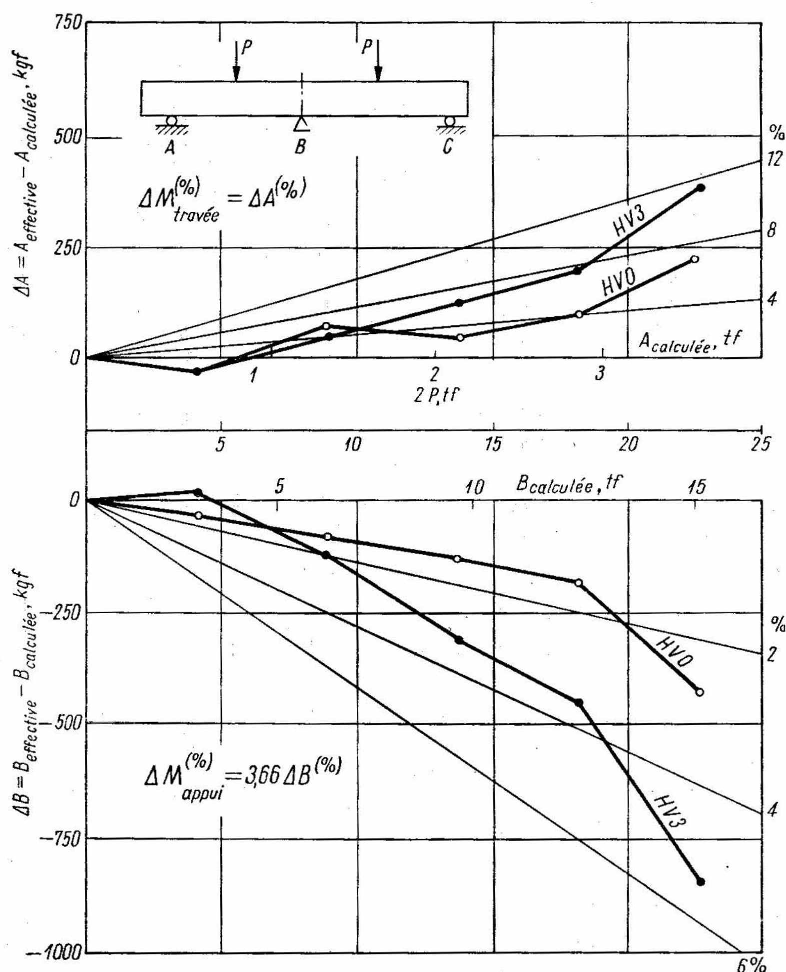


Fig. 5-64. Valeurs des réactions d'appui calculées et effectives pour les poutres *HVO* et *HV*3 [54]

Les mesures ont montré que la réaction A est supérieure à la valeur calculée, et la différence entre les valeurs théorique et effective augmente avec l'accroissement de la charge ; par exemple, dans la poutre *HV*3 peu avant la rupture la valeur $A_{effective}$ était supérieure de 11 % à la valeur $A_{calculée}$. Les résultats de ces essais pour les poutres *HV*0 et *HV*3 sont représentés sur la figure 5-64.

La figure 5-65 montre la relation entre la force de rupture et la valeur $\frac{M}{Th}$. Nous y voyons que les valeurs des efforts tranchants de rupture sont différentes, malgré le fait que toutes les poutres (série *HH*) ont été calculées pour la même valeur de l'effort tranchant. Il est à noter que la valeur minimale de l'effort tranchant transmis par une section en béton armé correspond au rapport $\frac{M}{Th} \approx 2{,}5$.

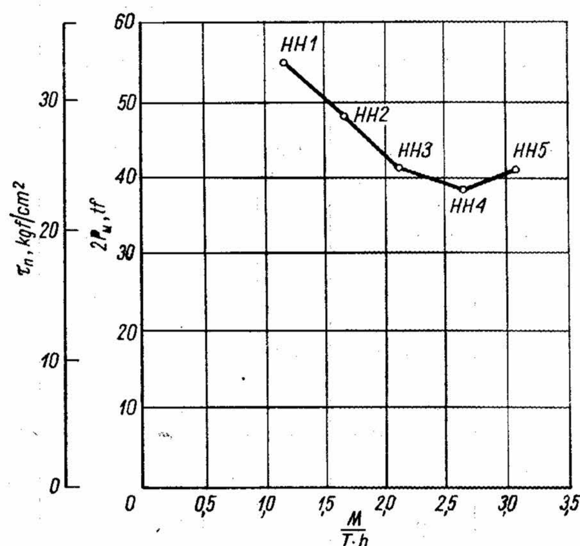


Fig. 5-65. Valeurs des contraintes τ_n et des charges de rupture en fonction de l'élancement de cisaillement [54]

Dans la troisième série, désignée par les symboles *HS*, on a examiné les poutres en forme de T, armées par des étriers et des barres relevées. Les résultats de cette série sont indiqués dans te tableau 5-9 et la figure 5-66.

De l'analyse de ces résultats il découle que la capacité portante totale suivie de la rupture par flexion a été obtenue dans les poutres où l'armature était suffisamment forte, donc pour $\eta \approx 1{,}0$. La poutre *HS*4 avec une armature transversale correspondant à 28 % du cisaillement a été rompue sous la charge $2P_u = 33{,}24$ tf, qui était 1,5 fois plus petite que la charge calculée de rupture par flexion. La rupture se manifestait dans les environs de l'appui central où les fissures inclinées à 36° ont pénétré profondément vers l'appui, provoquant finalement la destruction de la zone comprimée du béton près de l'appui. L'aspect

TABLEAU 5-9

Poutre	Etriers Ø mm	Partie du cisaillement transmise par l'armature η	Armature transversale $\bar{\omega}_v = \frac{A'_a f}{b_0 t \sin\theta}$	Armature à la flexion $100\bar{\omega} = \frac{100 A'_a}{b_0 h}$ travée	appui	Charge de calcul $2P_u$ à la flexion tf	Charge de rupture $2P_u$ d'après les essais tf	Cause de rupture
*HS*1	Ø 10 $t = 7{,}5$ cm	1,10	2,133	0,88	3,51	50,83	53,76	rupture de la zone comprimée par flexion
*HS*2	Ø 10 $t = 11$ cm	0,76	1,450	0,88	3,51	50,83	45,0	plastification de l'acier des étriers
*HS*3	Ø 8 $t = 11$ cm	0,49	0,645	0,88	3,51	50,23	44,0	
*HS*4	Ø 6 $t = 11$ cm	0,28	0,545	0,88	3,51	50,23	33,24	
*HS*5	Ø 8 $t =$ $= 20$ cm + barres relevées	0,77	1,230	0,88	3,46	50,23	49,68	
*HS*6	Ø 6 $t =$ $= 20$ cm + barres relevées	0,36	0,574	0,94	3,49	50,23	33,78	

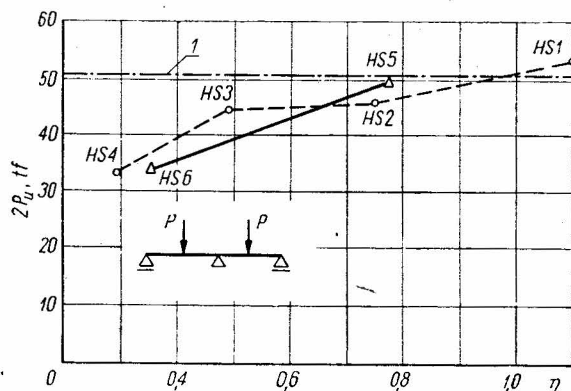


Fig. 5-66. Capacité portante au cisaillement en fonction de la nature et de la quantité d'armature transversale [54]
1 — valeur calculée de $2P_u$ après l'épuisement de la capacité portante
○ — poutres à armature orthogonale
△ — poutres armées suivant les lignes de force

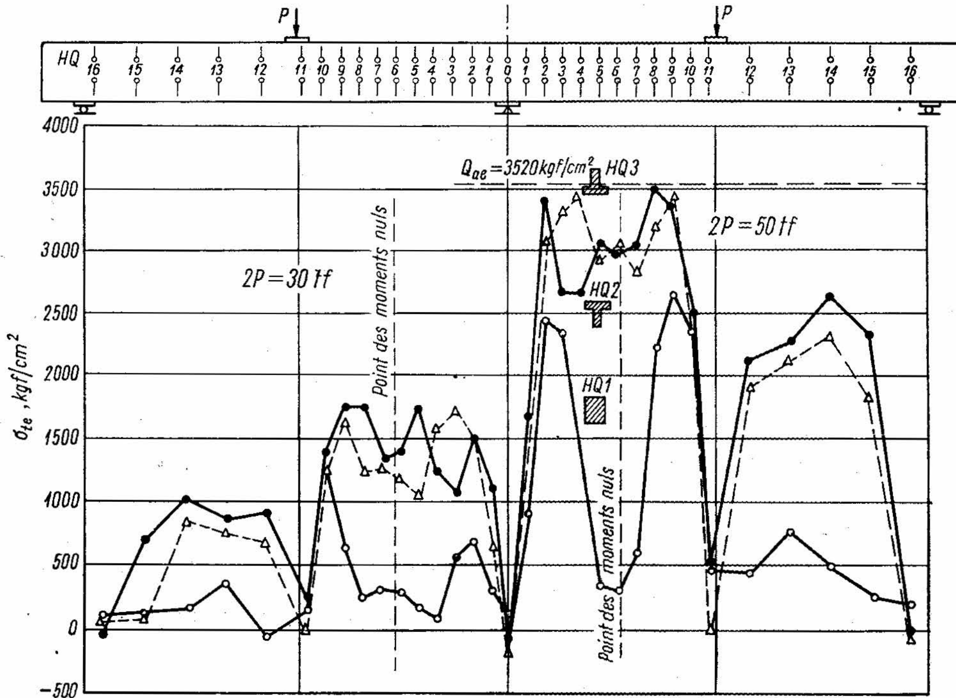


Fig. 5-67. Contraintes dans les étriers dans les poutres à deux travées de la série *HQ* dans les essais [54]

d'une poutre rompue était dans ce cas entièrement différent de celui des poutres armées par des barres relevées, où les fissures n'étaient pas situées suivant des lignes droites entre le bord supérieur et l'appui central, comme pour les poutres armées par des étriers. Les fissures étaient d'abord inclinées à 45° et ensuite, avec l'accroissement de la charge, elles étaient déviées à partir de la mi-hauteur de la poutre vers l'appui central ; près de l'appui les fissures étaient presque horizontales suivant le bord inférieur. Dans l'opinion de LEONHARDT cette disposition des fissures est un argument pour disqualifier les barres dites en chapeau avec les parties relevées près du bord inférieur de la poutre dans la zone de l'appui central (fig. 6-64).

Dans les poutres simplement appuyées la valeur des contraintes dans les étriers dépend principalement de la valeur des contraintes de cisaillement τ_0. Par contre, dans les poutres continues, l'influence supplémentaire du moment fléchissant est très nette. Cela est évident surtout d'après la figure 5-67 où on a indiqué les valeurs des contraintes σ_{te} dans les étriers des poutres de la série *HQ*. Sous la charge $2P = 50$ tf les contraintes maximales dans les étriers de la poutre *HQ* 1 (section rectangulaire) ont été observées à une distance de $h/2$ à h de l'axe de l'appui central et du point d'application de la force concentrée, donc dans la zone où le moment fléchissant et l'effort tranchant atteignent simultanément leurs valeurs maximales. La situation était différente dans les poutres en forme de T *HQ*2 et *HQ*3, où les contraintes dans les étriers au point de moment fléchissant nul étaient à peine

inférieures de 20 % aux valeurs maximales ($\sigma_{te} = 3500$ kgf/cm²). Or, dans la poutre *HQ*1, sous la même charge, les contraintes étaient presque nulles. Cette irrégularité peut être expliquée par le fait que dans une poutre rectangulaire (*HQ*1) dans la zone de moment faible les fissures ne se sont pas ouvertes à cause de la valeur peu élevée de σ_x. En même temps, les contraintes de cisaillement τ n'étaient pas suffisamment importantes pour produire les fissures obliques. Par contre, dans les poutres en forme de T, avec $b_0 = 1/3b$, déjà sous la charge $2P = 20$ tf on a pu observer dans la nervure la formation de fissures obliques produites par les contraintes de cisaillement. C'était la cause directe de contraintes tellement élevées dans les étriers situés dans la zone de $M_{(x)} = 0$. L'ordre de grandeur de ces contraintes était le même dans les cas où la dalle était située au-dessus ou bien au-dessous de la nervure.

5.4. INFLUENCE DE L'ÉLANCEMENT DE CISAILLEMENT SUR LA CAPACITÉ PORTANTE D'UNE POUTRE EN BÉTON ARMÉ •

Un des principaux critères pour l'estimation de l'effort tranchant de rupture et de la valeur de $\tau^1_{o\,max}$ est dit « élancement de cisaillement » — cette expression désigne le rapport $\frac{M}{Th}$. L'influence du rapport $\frac{M}{Th}$ sur la valeur des contraintes de cisaillement de rupture

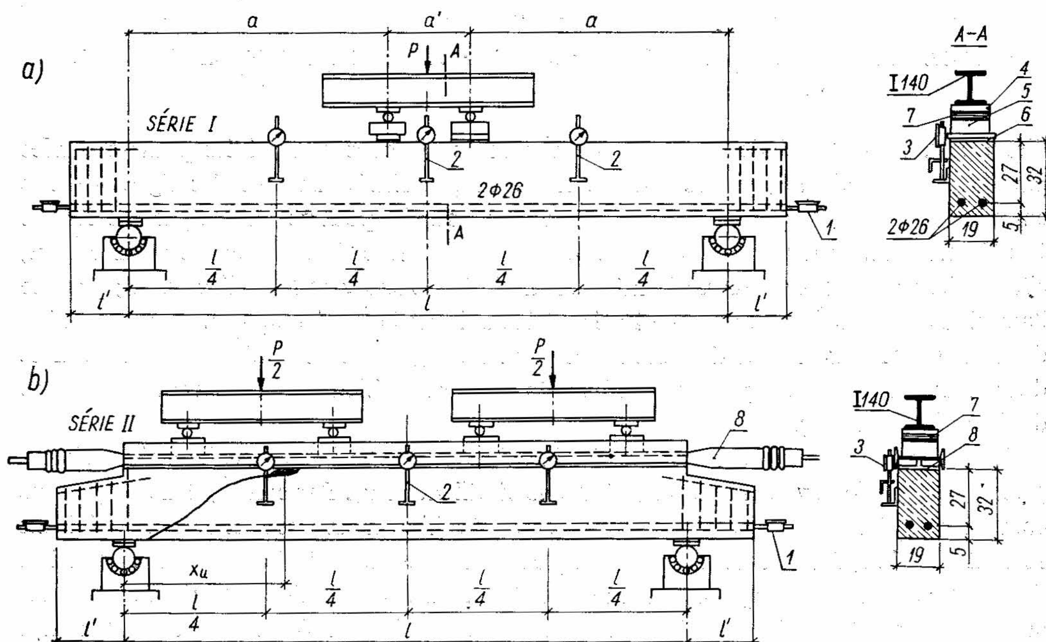


Fig. 5-68. Méthode de mise en charge des poutres dans les essais de LEONHARDT et WALTHER [51] : a) charge constituée par deux forces concentrées, b) charge uniformément répartie

1 — mesure du glissement des armatures principales, 2 — mesure des flèches, 3 — comparateur, 4 — plaque en acier de 20 mm d'épaisseur, 5 — plaque en acier de 50 mm d'épaisseur, 6 — couche de mortier de 0,5 cm d'épaisseur, 7 — cylindre en acier de Ø 40 mm, 8 — tuyau de pompiers rempli d'eau

τ_{max} est examinée ici en prenant comme exemples les essais réalisés par F. LEONHARDT et R. WALTHER [51] et les essais américains de J. MORROW et J. VIEST [62].

Les essais [51] concernaient des poutres rectangulaires de travées différentes avec armature et section transversale constantes. La figure 5-68 indique la disposition de mise en charge par deux forces concentrées (série *I*) et par une charge uniformément répartie (série *II*). La charge uniformément répartie des poutres de la série *II* a été réalisée au moyen de la pression exercée par une poutrelle IPN sur un tuyau de pompiers, placé sur la face supérieure de la poutre. Les poutres en béton, de résistance $\sigma_{wu} = 400$ kgf/cm², étaient armées par des barres de Ø 26 mm en acier crénelé (Torstahl St IIIb), avec $Q'_{a0,2} =$ $= 4740$ kgf/cm².

La figure 5-69 montre la distribution des fissures dans les poutres de la série *I* (1, 3, 5, 6, 8/1 et 10/1) soumises à la charge composée de deux forces concentrées. Les résultats les plus caractéristiques de ces essais sont indiqués dans le tableau 5-10 ; on constate que l'effort tranchant extrême T_u et également la contrainte τ_{max} sont observés dans la poutre No 1 caractérisée par l'élancement de cisaillement minimal $\frac{M}{Th} = 1$. Lorsque cet

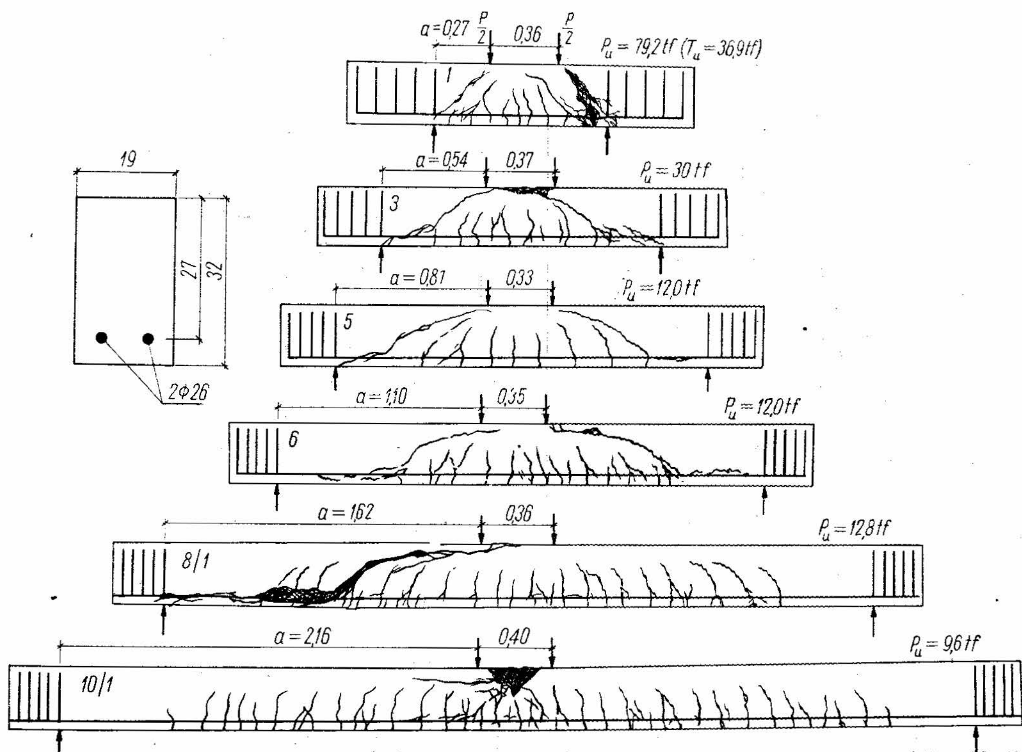


Fig. 5-69. Fissuration des poutres, dont l'élancement de cisaillement est différent, soumises à deux forces concentrées [51]

TABLEAU 5-10

Poutre	l m	a m	a' m	h cm	$\bar{\omega}$ %	σ_{wu} kgf/ /cm²	$\frac{M}{Th} = \frac{a}{h}$	Résultats des essais M_f tfm	T_u*) tf	$\tau_n = \tau_{max}$ kgf/ /cm²	M_u*) tfm	Cause de la rupture
1	0,90	0,27	0,36	27	2,07	355	1,0	1,78	39,6	94,2	10,75	cisaillement
2	1,15	0,40	0,35	27	2,07	355	1,5	2,50	26,5	62,8	10,60	„
3	1,45	0,54	0,37	27	2,07	355	2,0	1,88	15,0	35,5	8,10	„
4	1,70	0,67	0,36	27	2,07	355	2,5	2,48	8,87	21,0	5,90	„
5	1,95	0,81	0,33	27	2,07	355	3,0	2,18	7,80	18,6	6,27	„
6	2,35	1,10	0,35	27	2,07	355	4,0	2,44	6,95	16,4	7,42	„
7/2	3,10	1,35	0,40	27,8	2,01	372	5,0	1,48	6,95	16,0	9,22	„
8/1	3,60	1,62	0,36	27,8	2,01	373	6,0	1,57	6,70	15,4	10,61	„
9/1	5,80	1,89	2,02	27,3	2,04	382	7,0	2,16	6,0	14,0	11,14	„
10/1	4,70	2,16	0,40	27,2	2,05	361	8,0	2,17	5,15	12,1	10,79	„
10/2	4,70	2,16	0,40	27,2	2,05	361	8,0	2,06	5,60	13,2	11,67	„

*) Compte tenu du poids propre de la poutre, égal à 0,5 tf/m.

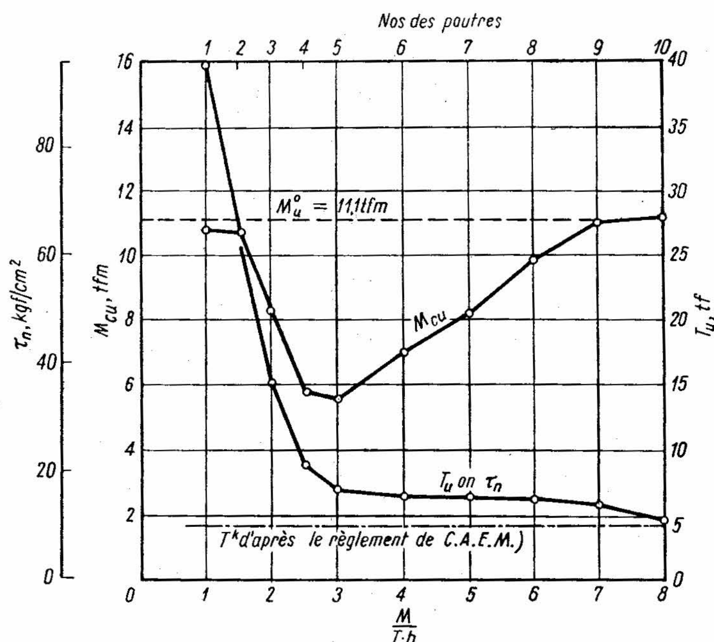


Fig. 5-70. Valeurs de M_{cu}, T_u et τ_n en fonction de l'élancement de cisaillement [51]

élancement s'accroît, les valeurs de T_u et τ_{max} diminuent. A partir de la valeur $\frac{M}{Th} = 4$ la contrainte τ_{max} reste presque constante et égale 15 kgf/cm² environ, cette valeur étant beaucoup plus petite que la résistance du béton en traction $\sigma' = 30$ kgf/cm².

Les valeurs du moment de cisaillement de rupture M_{cu} et de l'effort tranchant de rupture T_u en fonction de l'élancement de cisaillement $\frac{M}{Th}$ sont indiquées sur la figure 5-70. On y voit que le minimum de M_{cu} correspond aux valeurs $\frac{M}{Th} = 2,5$ et 3,0. Lorsque l'élancement de cisaillement dépasse 3,0 on observe que le moment M_{cu} croît jusqu'à la valeur maximale correspondant à la flexion pour laquelle $\frac{M}{Th} \geqslant 7,0$.

La figure 5-71 représente la fissuration de quelques poutres de la série *II*, chargées uniformément ; ce sont les poutres 11/1, 13/1, 14/1 et 16/1. Les résultats des essais sont rassemblés dans le tableau 5-11.

La disposition des fissures indiquée sur la figure 5-71 nous montre que les fissures obliques critiques sont ouvertes dans la zone d'appui. Ces fissures ont pénétré beaucoup plus profondément dans les poutres que les fissures dues à la flexion, d'où ont résulté la réduction et la destruction de la zone de compression du béton et, finalement, l'épuisement de la capacité portante de la poutre. Dans la poutre de travée $l = 6{,}00$ m $\left(\frac{l}{h} = 20\right)$ une des deux poutres examinées (17/1) s'est rompue par flexion et l'autre (17/2) par cisaillement.

Cela semble prouver, pour les poutres sans armature transversale, l'importance du rapport $\frac{l}{h} = 20$, lequel sépare deux sortes de ruptures : la rupture par cisaillement pour $\frac{l}{h} < 20$ et par flexion pour $\frac{l}{h} > 20$.

TABLEAU 5-11

Poutre	l	$\frac{l}{h}$	$100\bar{\omega}$	σ_{wu}	Valeurs expérimentales maximales					Valeurs expérimentales dans la section de rupture				
					M_f	P_u	T_u*)	$\tau_n = \tau_{max}$ *)	M_u*)	x_u	$\frac{M}{Th}$	M_u	T_u	τ_n
	m		%	kgf/cm²	tf m	tf/m	tf	kgf/cm²	tfm	cm		tfm	tf	kgf/cm²
11/1	1,50	5,17	1,87	418	1,41	36,73	27,55	60,6	10,34	60	6,21	9,91	5,51	12,1
12/1	2,00	7,32	2,04	403	1,13	20,25	20.25	46,5	10,12	67	4,94	9,03	6,69	15,6
13/1	2,50	9,15	2,04	409	1,19	11,12	13,90	32,5	8,69	90	7,55	8,03	3,90	9,1
14/1	3,00	11,0	2,04	397	1,91	7,13	10,70	25,0	8,02	95	6,49	6,95	3,92	9,1
15/1	4,00	14,71	2,05	420	2,85	4,77	9,55	22,5	9,55	85	4,28	6,39	5,49	12,9
16/1	5,00	18,32	2,04	414	2,60	3,85	9,63	22,6	12,04	85	3,92	6,78	6,35	14,9
17/1	6,00	22,0	2,05	389	2,18	2,92	8,75	20,6	13,12	300	3,04	5,51	6,62	15,5

*) Compte tenu du poids propre.

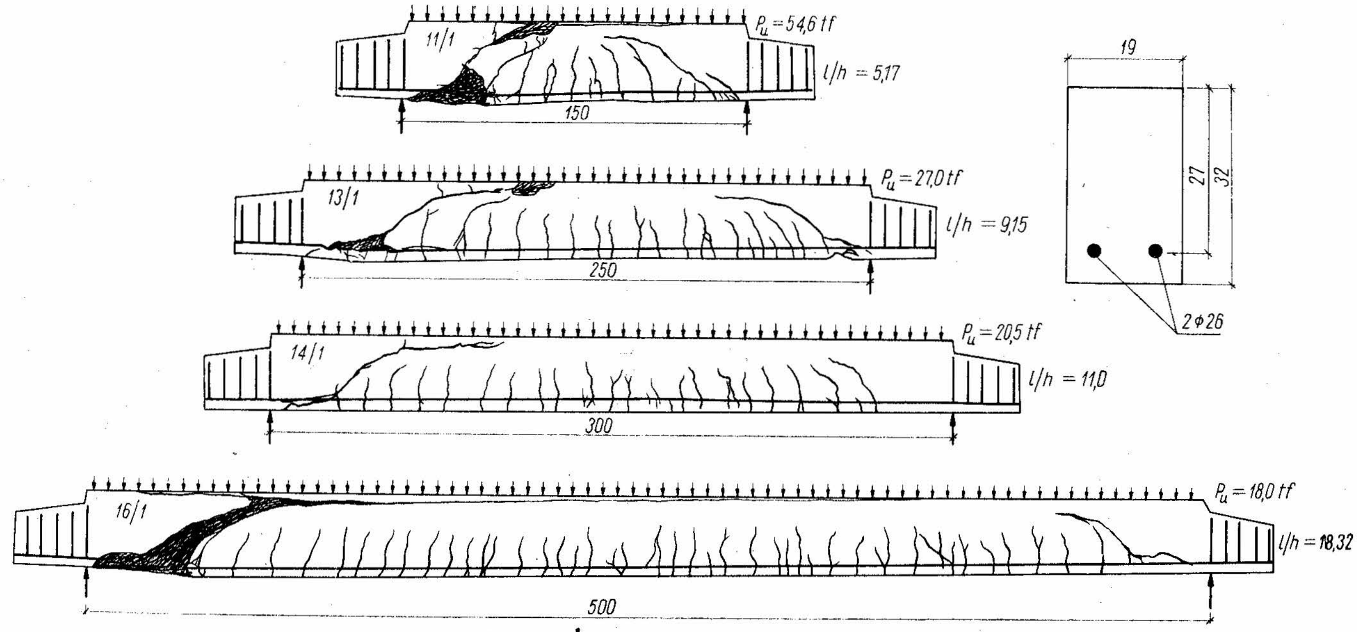


Fig. 5-71. Fissuration des poutres chargées uniformément dont l'élancement de cisaillement est différent [51]

Sur la figure 5-72 on a indiqué l'endroit où s'est manifestée la rupture de la zone comprimée du béton (x_u) pour diverses travées. Cet emplacement est situé à 2 à 3,5 h de l'appui.

De plus, LEONHARDT et WALTHER ont déterminé expérimentalement la relation ci-dessous pour le calcul de l'élancement critique de cisaillement

$$\left(\frac{M}{Th}\right)_{critique} = 9-0{,}27\frac{l}{h}. \tag{5.9}$$

La valeur des contraintes de cisaillement de rupture τ_n dépend considérablement du rapport $\frac{l}{h}$. La valeur maximale $\tau_n \approx 60$ kgf/cm² correspond au rapport $\frac{l}{h} \approx 5$. Lorsque

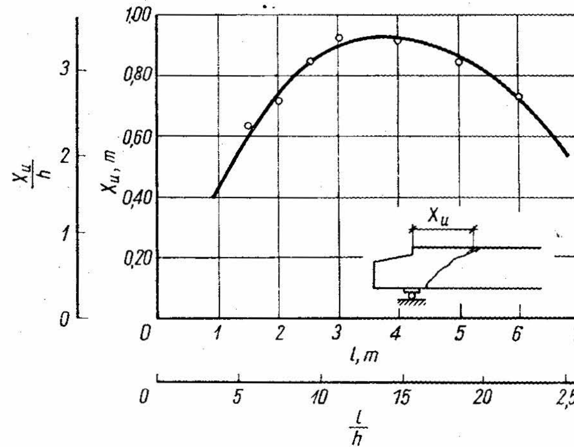


Fig. 5-72. Position de la fissure oblique de rupture par rapport à l'appui en fonction du rapport l/h [51]

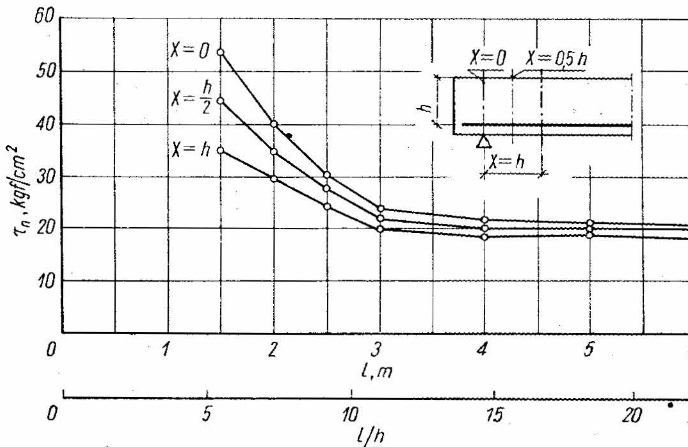


Fig. 5-73. Valeurs de τ_n en fonction du rapport l/h dans une poutre uniformément chargée [51]

le rapport $\frac{l}{h}$ croît jusqu'à 22, la contrainte τ_n diminue de manière asymptotique jusqu'à la valeur de 20 kgf/cm^2 environ. Pour les trois sections transversales dans la zone d'appui cette relation est représentée sur la figure 5-73.

En comparant les résultats des essais des poutres des deux séries *I* et *II* nous voyons que les valeurs minimales des contraintes τ_n trouvées dans les poutres des travées maximales sous une charge uniforme sont supérieures de 40 % environ à celles qui apparaissent dans les poutres chargées par deux forces concentrées. Cela s'explique par le fait que la rupture des poutres chargées uniformément se manifestait dans la zone d'appui. Dans cette zone, aussi bien le moment fléchissant que la contrainte σ_x étaient plus petits ; par contre, les valeurs de l'effort tranchant étaient considérables. Or, dans les poutres de la série *I* la rupture se présentait près des points d'application de forces où les valeurs du moment et de l'effort tranchant étaient maximales. L'influence respective du moment et de l'effort tranchant dans les poutres examinées de la série *II* est représentée sur la figure 5-74. Nous observons que l'augmentation de l'élancement de cisaillement $\frac{M}{Th}$ entraîne un accroissement linéaire du moment de rupture par cisaillement et, simultanément, une diminution linéaire de l'effort tranchant de rupture.

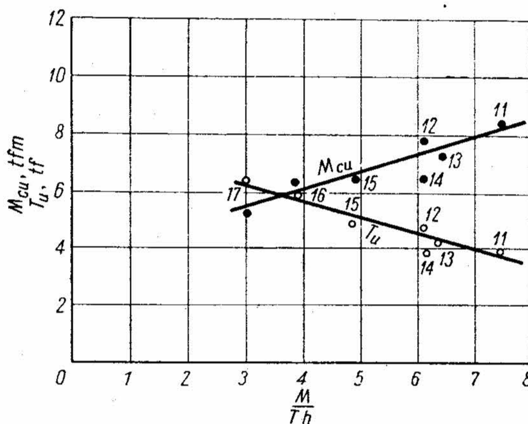


Fig. 5-74. Moment et effort tranchant de rupture en fonction de $\frac{M}{Th}$ dans les poutres de la série *II* [51]

Les essais américains de MORROW-VIEST [62] ont été réalisés sur 38 poutres de section rectangulaire simplement appuyées et munies exclusivement d'armatures longitudinales. La charge concentrée au centre de la travée a été transmise sur la poutre par l'intermédiaire d'un poteau en béton armé faisant partie de la poutre (fig.5-75). Les poutres étaient de même section transversale (b = 30,5 cm et h_t = 40,6 cm) et différaient par les longueurs des travées, la qualité du béton et le pourcentage de l'armature longitudinale. L'observation du développement des fissures nous indique qu'après l'ouverture des fissures obliques une augmentation ultérieure de la charge n'est possible que dans les poutres dont l'élancement de cisaillement est petit.

Dans le cas de $\frac{a}{h} \approx 3{,}5$ on a généralement une seule fissure oblique, située au niveau de l'armature longitudinale à environ h de distance du point d'application de la charge concentrée. Quand la charge augmente, la fissure se développe horizontalement vers l'appui et vers le haut jusqu'au point d'application de la charge. L'ouverture des fissures obliques a toujours été liée à un déplacement net des efforts internes dans la poutre, ce qui entraînait l'épuisement de la capacité portante dans les poutres avec un élancement de cisaillement supérieur à 3,5. C'est probablement pourquoi MORROW et VIEST proposent d'identifier

dans les poutres sans armature transversale le moment de rupture par cisaillement avec le moment correspondant à la première fissure oblique. Ils ont établi, sur une base expérimentale, la formule suivante pour calculer l'effort tranchant de fissuration

$$T_F = \frac{7}{8} bh \left(0{,}378 + \frac{10{,}05}{\frac{a'_f}{n} \overline{\omega} h + 10} \right) \sqrt{\sigma_{cyl}}, \qquad (5.10)$$

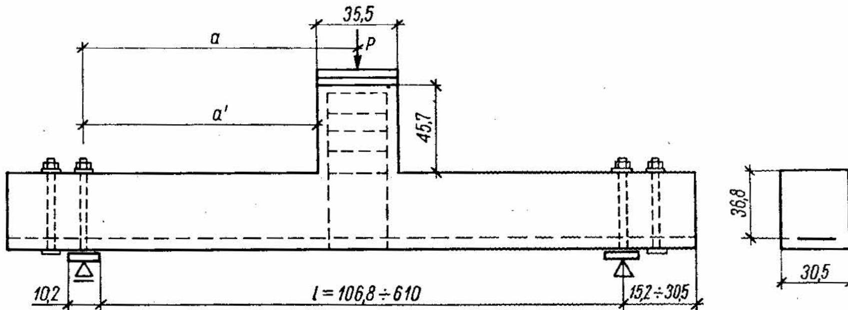


Fig. 5-75. Structure d'une poutre dans les essais de MORROW et VIEST [62]

où a'_f est l'espacement entre le début de la fissure et l'appui,

σ_{cyl}, la résistance du béton à la compression sur cylindres de Ø 15 cm, $h_t = 30$ cm,

$n = \frac{E_a}{E_b}$.

Dans cette formule les auteurs proposent d'admettre :

$$a'_f = 0 \quad \text{pour} \quad a' \leqslant h,$$

$$a'_f = a' - h \quad \text{pour} \quad a' \geqslant h > \frac{a'}{2},$$

$$a'_f = \frac{a'}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{a'}{2} \geqslant h;$$

où a' désigne la distance entre l'appui et le bord du poteau transmettant la charge (fig. 5-75).

Plusieurs chercheurs américains, et parmi eux JONES, MODY et LAUPA, supposent que l'effort tranchant de rupture T_u augmente si rapidement que le moment correspondant de rupture par cisaillement reste constant pour un élancement de cisaillement arbitraire. Cette constatation ne se trouve cependant pas entièrement confirmée par les essais mentionnés ci-dessus [51] et [62] (fig. 5-76).

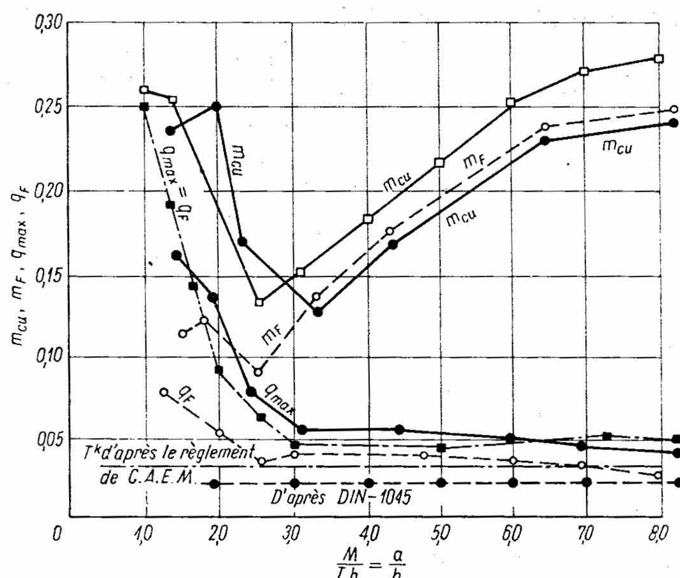


Fig. 5-76. Valeurs réduites de m_{cu}, m_F, q_{max}, q_F en fonction de l'élancement de cisaillement
□, ■ — essais de LEONHARDT et WALTHER [51],
○, ● — essais de MORROW et VIEST [62]

Afin de faciliter la comparaison des résultats des essais allemands et américains on a remplacé dans les diagrammes de la figure 5-76 les valeurs effectives M_{cu} et T_u par les valeurs réduites suivantes

$$m_{cu} = \frac{M_{cu}}{bh^2\sigma_{pr}}, \tag{5.11}$$

$$q_{max} = \frac{T_u}{bh\sigma_{pr}}. \tag{5.12}$$

La même figure indique également la valeur $m_F = \frac{M_f}{bh^2\sigma_{pr}}$ qui désigne le moment réduit de l'ouverture de la première fissure oblique. Nous voyons ainsi qu'avec un élancement de cisaillement supérieur à 3,0 l'épuisement de la capacité portante des poutres sans armature transversale succède directement à l'ouverture de la première fissure oblique. Par contre, pour des petits élancements de cisaillement $\frac{a}{h} < 2,5$, on peut continuer la mise en charge après l'ouverture de la première fissure oblique. Cela prouve l'influence exclusive de l'effet d'un arc avec tirant, mentionné précédemment.

Les cas où le rapport $\frac{a}{h}$ est égal à 2,5 ou 3,0 sont les plus dangereux, car avec une armature incorrecte, c'est- à -dire déterminée pour des raisons de construction, un épuisement brusque de la capacité portante, sans avertissement, peut se manifester.

5.5. POUTRE EN BÉTON ARMÉ DE SECTION TRANSVERSALE MINIMALE VIS-A-VIS DE L'EFFORT TRANCHANT

Les études expérimentales dont les résultats ont été analysés dans les chapitres précédents indiquent que la capacité portante d'une poutre en béton armé dans la zone de cisaillement dépend de plusieurs paramètres. En conséquence, il n'est pas raisonnable de lier les dimensions minimales de la poutre exclusivement à la valeur de l'effort tranchant T ou bien à la valeur des contraintes de cisaillement τ. Le règlement de la Prusse de 1904, le premier règlement dans le monde considérant le problème de la contrainte $\tau^1_{0\,max}$, a déterminé la valeur maximale des contraintes de cisaillement égale à 4,5 kgf/cm^2 pour les bétons utilisés à l'époque, dont la résistance était $\sigma_{wu} = 150$ à 180 kgf/cm^2. Régnait alors l'opinion erronée que le béton et également l'armature transversale sont soumis au cisaillement pur. Ce n'est que MÖRSCH qui a réussi à vaincre cette fausse opinion, et sur la base des études expérimentales réalisées avec BACH et GRAF il a obtenu dans les règlements allemands de 1916 que la contrainte $\tau^1_{0\,max}$ soit augmentée jusqu'à la valeur de 14 kgf/cm^2. Cette valeur a été conservée telle quelle dans les rédactions ultérieures des règlements allemands de 1925 et 1932 avec des valeurs supplémentaires de τ^1_{0max} pour les bétons de meilleure qualité. Le règlement allemand DIN 1045 de 1943 indique $\tau^1_{0max} = 14$ kgf/cm^2 pour $\sigma_{wu} = 120$ kgf/cm^2, $\tau^1_{0max} = 16$ kgf/cm^2 pour $\sigma_{wu} = 160$ kgf/cm^2, $\tau^1_{0max} = 18$ kgf/cm^2, pour $\sigma_{wu} = 225$ kgf/cm^2 et $\tau^1_{0max} = 20$ kgf/cm^2 pour $\sigma_{wu} = 300$ kgf/cm^2. Le règlement polonais actuellement en vigueur PN/B-03260 suppose l'identité de τ^1_{0max} et de la résistance σ', et les valeurs prescrites correspondent presque exactement aux valeurs de τ^1_{0max} d'après DIN. Dans les règlements des Etats-Unis, de la France et de l'U.R.S.S. les valeurs admises de τ^1_{0max} sont beaucoup plus élevées. Le règlement préparé en 1963 en U.R.S.S. pour le C.A.E.M.[1] indique l'effort tranchant maximal d'après la formule

$$T^k_{max} = 0{,}25\sigma^0_b bh. \tag{5.13}$$

σ^0_b désigne ici la valeur de calcul de la résistance du béton, obtenue comme le produit de la résistance sur prisme par des coefficients dits de conditions de service (pour $\sigma^0_{cyl} = 300$ kgf/cm^2, $\sigma^0_b = 150$ kgf/cm^2).

La valeur de T^k_{max} d'après le règlement du C.A.E.M. est environ deux fois plus grande que celle proposée par MÖRSCH et acceptée par DIN 1045. Cette valeur est indiquée aussi bien par le règlement du C.A.E.M. que par MÖRSCH seulement en fonction de la qualité du béton ; cela concerne également la section transversale minimale. Afin de pouvoir mieux étudier le problème de τ^1_{0max}, on examinera ci-après quelques-unes des plus importantes recherches expérimentales dans ce domaine.

5.5.1. ESSAIS AMÉRICAINS DE SLATER, LORD ET ZIPPRODT

Les essais [77] ont été assez minutieusement présentés dans le paragraphe 5.3.2 pour analyser l'influence des divers types d'armature transversale sur la capacité portante de la zone de cisaillement. On a mentionné également que les contraintes déterminées dans ces

[1] Conseil d'Assistance Economique Mutuelle.

essais étaient très élevées (par exemple dans une poutre en béton de résistance 390 kgf/cm² on a trouvé $\tau_n = 115$ kgf/cm²). Les résultats de ces essais ont servi de point de départ pour la critique de la condition de MÖRSCH $\tau^1_{0max} = \sigma'$. Cette critique a été formulée par les chercheurs américains et principalement par SLATER qui affirmait déjà en 1919 que la valeur très basse de τ^1_{0max} n'est pas justifiée par la sécurité de la zone de cisaillement. Ces essais (paragraphe 5.3.2) ont été effectués pour les besoins des constructions navales sur des poutres courtes en double T de forme inhabituelle, avec les membrures supérieures et inférieures fortement armées, (voir fig. 5-43).

Une partie de ces poutres a été conçue de telle façon que le béton de l'âme était comprimé par les contraintes principales obliques de compression. Ceci correspondait à la valeur $\tau_0 \approx 0{,}35\ \sigma_{pr}$ (ici σ_{pr} est la résistance à la compression sur cylindres de Ø 20 cm et $h_t = 40$ cm). A cause de la forme peu habituelle des poutres examinées certains chercheurs ont pris une attitude assez critique envers ces très intéressants essais. Il en est résulté une interprétation particulière de ces essais établie par O. GRAF et publiée par DAfE, cahier 61.

5.5.2. ESSAIS FRANÇAIS DE ROBINSON

En 1960 ROBINSON a examiné la valeur des contraintes maximales de cisaillement τ_{0max} sur 9 poutres en forme de T. La forme des poutres et la disposition de la charge sont représentées sur la figure 5-77. L'épaisseur de l'âme était à peine de 6 cm, les poutres étaient soumises au quart de la portée à une force concentrée. Au-dessus des appuis et dans la section chargée l'âme mince a été renforcée par des membranes transversales de 8 cm d'épaisseur, et de cette façon la zone des perturbations produites par les contraintes σ_y a été très limitée. La force concentrée située au quart de la portée produisait un élancement de cisaillement du côté gauche $\frac{M}{Th} = 2$ différent de celui du côté droit $\frac{M}{Th} = 6$.

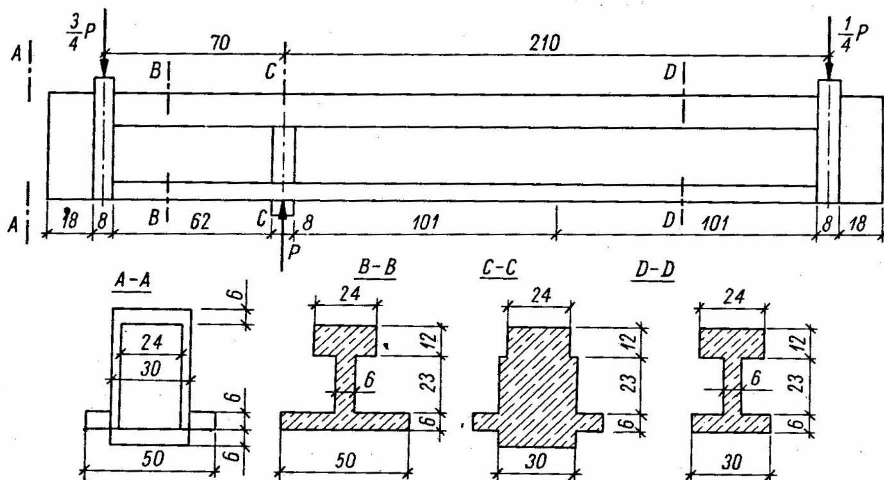


Fig. 5-77. Poutres dans les essais de ROBINSON [70]

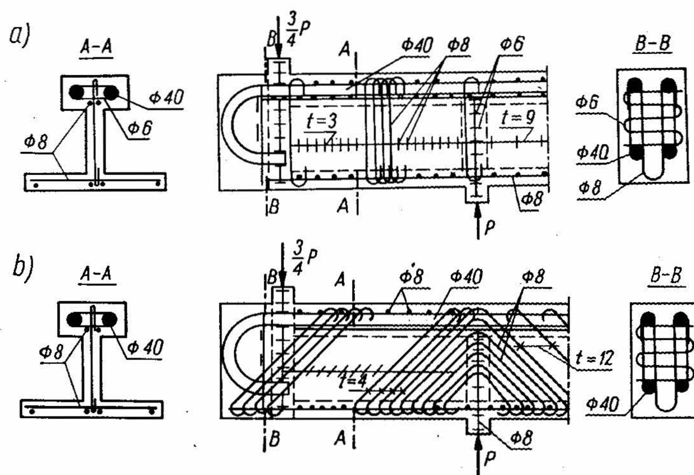


Fig. 5-78. Armature des poutres dans les essais de ROBINSON [70] :
a) poutres *N* munies d'étriers verticaux,
b) poutres *J* munies d'étriers inclinés à 45°

La figure 5-78 montre l'armature des poutres de ROBINSON. L'armature principale dans toutes les poutres était composée de deux barres lisses de Ø 40 mm, munies de grands crochets. La zone d'ancrage a été encore renforcée par une forte armature transversale. Les étriers étaient exécutés partiellement en acier lisse (poutres *R*) et partiellement en acier crénelé — Torstahl (poutres *T*). Les poutres désignées par la lettre *N* étaient armées par des étriers verticaux, les poutres avec la lettre *J*, par des étriers inclinés à 45°. Cinq poutres étaient munies d'étriers de diamètre Ø 8 mm (fig. 5-78), quatre poutres, d'étriers de diamètre Ø 10 mm. L'espacement des étriers a été conçu de manière que le pourcentage de l'armature transversale soit à peu près identique dans toutes les poutres. Les étriers ont été déterminés pour avoir des contraintes égales à la limite d'élasticité (4000 kgf/cm^2 environ) sous une force de rupture égale à $P_u \approx 30$ tf. D'après la méthode classique de calcul ($n = 15$) le bras de levier des efforts internes était $z = 31{,}4$ cm et l'axe neutre se situait à la hauteur $x = 20$ cm.

Les résultats des essais [69] et [70] sont donnés par le tableau 5-12, d'où il découle que la rupture des poutres *N* armées d'étriers verticaux a eu lieu sous la forme d'écrasement du béton dans l'âme par les contraintes obliques de compression. La valeur de ces contraintes, égale à $\sigma_2 \approx 2\tau_0$, a atteint la résistance du béton sur prisme σ_{pr} ou bien n'était que peu différente de cette résistance. La poutre *NR*8 représente un cas particulier ; réalisée en béton de la plus basse qualité $\sigma_{wu} = 182$ kgf/cm^2 elle a subi l'écrasement de l'âme sous la contrainte $\sigma_2 \approx 0{,}83\sigma_{pr}$. Dans les poutres *J* munies d'étriers inclinés on a observé la rupture dans le béton de la membrure supérieure et non la rupture par écrasement du béton dans l'âme, où pour $\sigma_{wu} = 324$ kgf/cm^2 et 242 kgf/cm^2 les contraintes étaient $\tau_n = 179$ kgf/cm^2 et 156 kgf/cm^2. Dans les âmes armées d'étriers inclinés les contraintes de calcul dans les étriers $\tilde{\sigma}^0_{t_0}$ étaient beaucoup plus élevées que la limite

TABLEAU 5-12

No de la poutre	Armature transversale				Valeurs mesurées				Contraintes de cisaillement			Contraintes de rupture calculées****)		
		Ø mm	t cm	$\bar{\omega}_v$*) %	σ_{wu} kgf/cm²	P_f tf	P_u tf	Type de rupture	$\tau_n = \frac{T_u}{b_0 z}$ **) kgf/cm²	$\frac{2\tau_n}{\sigma_{pr}}$ ***)	τ_{fu1} kgf/cm²	σ_a kgf/cm²	σ_{br} kgf/cm²	σ_{te} kgf/cm²
NR 8	Etriers verticaux	Ø 8	3	2,78	182	3,5	16	Rupture de l'âme par la compression inclinée	64	0,83	14	1060	95	2300
NR 10		Ø 10	4	3,29	290	6	30		120	0,98	24	2000	177	3700
NT 8-1		ϕ 8	3	2,78	243	8	28		111	1,07	32	1870	165	4000
NT 8-2		ϕ 8	3	2,78	248	7	28		111	1,05	28	1870	165	4000
NT 10		ϕ 10	4	3,29	207	6,5	22		88	1,00	26	1470	130	2700
JR 8	Etriers inclinés à 45°	Ø 8	4	2,95	315	7	40	Rupture de la zone comprimée du hourdis par M et T	159	—	28	2670	236	5400
JR 10		Ø 10	6	3,10	324	5	45		179	—	20	3000	266	5800
JT 8		ϕ 8	4	2,95	242	7	39		156	—	28	2600	230	5300
JT 10		ϕ 10	6	3,10	306	7	44		175	—	28	2940	260	5700

*) $\bar{\omega}_v = \frac{A'_{af}}{b_0 t \sin\theta}$.

**) $T_u = 3/4\, P_u$; $b_0 = 6$ cm; $z = 31,4$ cm.

***) $\sigma_{pr} = 0,85\, \sigma_{wu}$.

****) Valeurs calculées d'après la théorie classique, avec $n = 15$.

d'élasticité de l'acier Q'_a, tandis qu'en réalité les contraintes dans les étriers étaient inférieures à $Q'_a = 4000$ kgf/cm², cela étant prouvé par le fait que l'ouverture des fissures obliques dans l'âme était restée très petite jusqu'à l'épuisement de la capacité portante. Peu avant la rupture, l'ouverture maximale des fissures près des étriers verticaux était de 0,31 à 0,45 mm et près des étriers inclinés, de 0,06 à 0,37 mm. Presque toutes les fissures à gauche et à droite de la charge concentrée traversaient l'âme dans toute sa hauteur et suivant un angle de 45°.

Les essais de Robinson ont montré que le comportement du béton dans l'âme dépend dans une grande mesure de l'inclinaison des armatures transversales. Il est apparu qu'avec les étriers inclinés à 45° et avec le même pourcentage d'acier la capacité portante était beaucoup plus élevée et l'ouverture des fissures moins importante. Il semble que cette constatation représente un argument de plus dans l'opinion que l'armature suivant les lignes de force dans la zone de cisaillement est plus efficace que l'armature orthogonale, si largement préconisée par des théoriciens contemporains dans le domaine du béton armé. Dans l'analyse de ses essais Robinson suggérait une réhabilitation des barres « flottantes » dans l'armature contre le cisaillement, barres qui avaient été à l'époque disqua-

lifiées par MÖRSCH. Dans une certaine mesure les essais de ROBINSON ont facilité les modifications des méthodes traditionnelles de l'armature transversale ; il est cependant difficile de désavouer sur cette base l'hypothèse de MÖRSCH concernant l'inefficacité des barres « flottantes ». Les essais de ROBINSON ont été effectués sur des poutres de sections rares dans la pratique et avec des étriers très serrés, tandis que la conclusion de MÖRSCH a été motivée par des essais effectués sur des poutres correspondant à la pratique courante.

5.5.3. ESSAIS DE LEONHARDT ET WALTHER

Dans les essais [51] et [52] le problème de $\tau_{0\,max}$ a été examiné sur deux poutres en forme de double T (*T*1 et *T*2) avec des âmes minces, comme dans les poutres de ROBINSON. Par suite, les contraintes de cisaillement calculées sous la charge d'utilisation étaient $\tau_0 = 65$ kgf/ /cm². C'est une valeur très élevée, surtout si l'on tient compte de la résistance prévue du béton $\sigma_{wu} = 300$ kgf/cm². Les essais se sont caractérisés par une précision de réalisation des poutres et une exactitude des mesures extraordinaires. Chaque poutre comportait 350 points de mesure des déformations du béton et de l'acier et 300 points de mesure de l'ouverture des fissures. La lecture des indications des appareils de mesure a été assurée par 12 techniciens. Le processus de mise en charge d'une poutre durait 3 jours à cause du grand nombre de points de mesure.

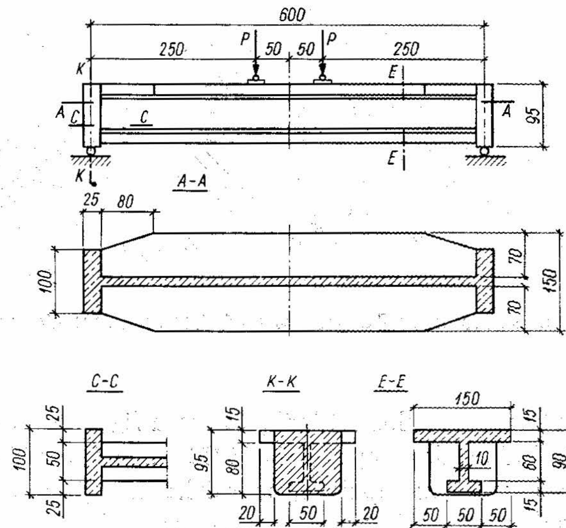


Fig. 5-79. Poutre en forme de T à âme mince dans les essais de LEONHARDT et WALTHER [51]

La forme et les dimensions ainsi que la disposition des charges des poutres *T*1 et *T*2 sont représentées sur la figure 5-79. La poutre de 90 cm de hauteur et de 6,00 m de portée a été réalisée avec une âme de 10 cm d'épaisseur, munie de goussets de 5 cm dans les jonctions avec les membrures. Aux abouts des poutres, des membranes de dimensions 95×100×25 cm ont été prévues pour la transmission des réactions d'appui.

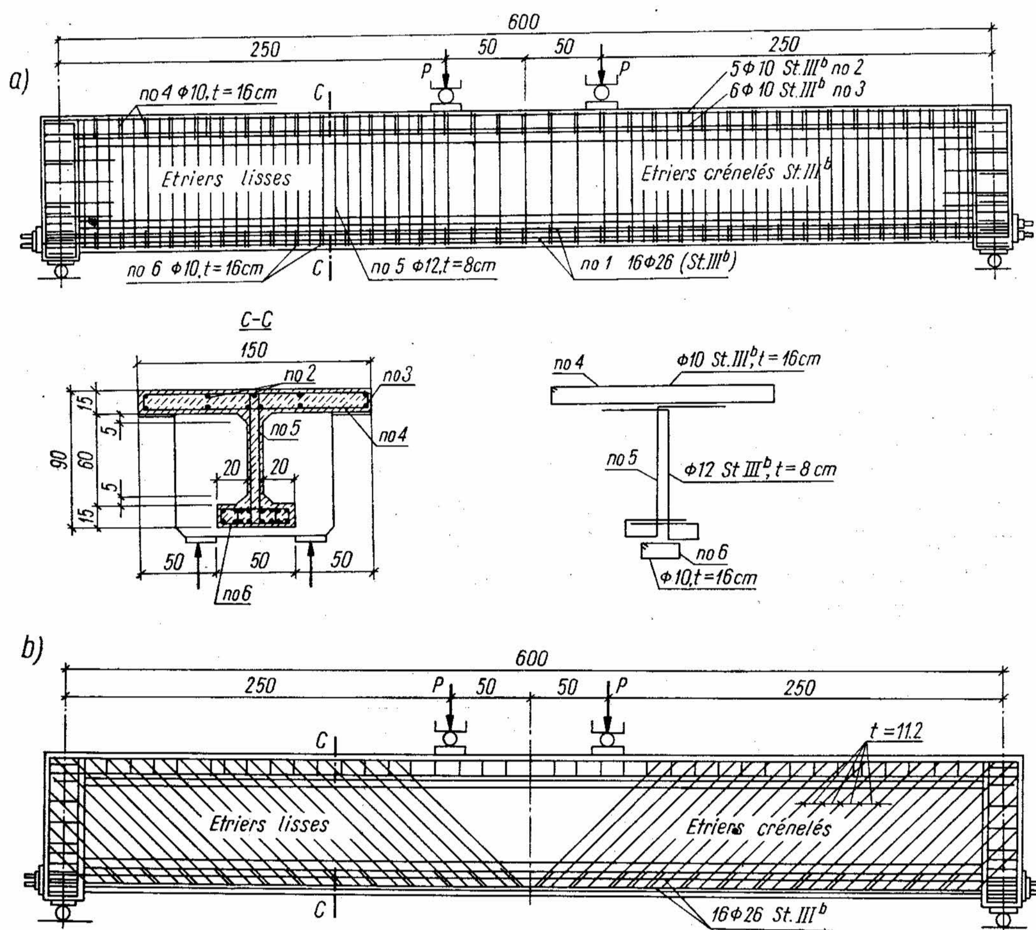


Fig. 5-80. Armature des poutres en forme de T dans les essais de LEONHARDT et WALTHER [51] : a) poutre *T*1 b) poutre *T*2

L'armature des poutres en question est indiquée sur la figure 5-80. Dans la membrure tendue l'armature principale était composée de 16 Ø 26 mm (acier Torstahl). Toutes les barres ont été conduites jusqu'aux appuis et, pour éviter des glissements, ancrées à l'extérieur des membranes au moyen d'écrous et de platines en acier.

L'armature de l'âme dans la poutre *T*1 était composée d'étriers doubles de Ø 12 mm, perpendiculaires à l'axe de la poutre, avec espacement de 8 cm, et convenablement ancrés dans la membrure comprimée. Les étriers ont été calculés suivant la théorie classique pour transmettre 100 % du cisaillement sous la charge d'utilisation égale à 100 tf.

Dans la poutre *T*2 l'âme a été armée avec des étriers inclinés à 45° par rapport à l'axe longitudinal de la poutre. Ces étriers, espacés de 11,2 cm comme dans la poutre *T*1, correspondaient à 100 % du cisaillement sous la charge d'utilisation égale à 100 tf. Dans les deux poutres on a mis des étriers lisses dans la moitié gauche et des étriers en acier crénelé

TABLEAU 5-13

Poutre	Béton σ_{wu} kgf/cm²	Armature principale $Q'_{a0,2} \approx 4700$ kgf/cm²	Armature transversale $Q'_a \approx 4300$ kgf/cm²		Résultats des essais		
		Ø mm	Ø mm	type d'étriers	force de rupture $2P_u$ tf	τ_n kgf/cm²	cause de rupture
*T*1	298	16 Ø 26	Ø 12 $t = 8$cm	verticaux	160,0	111,0	rupture du béton dans l'âme due aux contraintes σ_2
*T*2	269	16 Ø 26	Ø 12 $t = 11,2$ cm	inclinés	232,0	159,0	

dans la moitié droite. La limite d'élasticité de toutes les sortes d'aciers était $Q'_{a0,2} = 4300$ à 4700 kgf/cm². Conformément aux prévisions, la rupture de ces deux poutres s'est produite par la destruction du béton dans l'âme sous l'action des contraintes principales inclinées de compression σ_2. On a pu observer dans cette zône la croûte du béton extérieur qui se détachait ; ce phénomène se manifeste souvent dans les poteaux frettés soumis à des charges élevées.

Le tableau 5-13 indique les résultats expérimentaux obtenus au moment où la limite de résistance à la flexion à été atteinte. Malgré la même cause de rupture dans ces deux poutres, la résistance de la poutre avec les étriers inclinés à 45° (poutre *T*2) a été supérieure de 50 % environ à celle de la poutre *T*1 où l'on avait employé des étriers verticaux. Tenant compte du fait que la résistance du béton σ_{wu} dans la poutre *T*2 était plus faible, on peut expliquer cette différence évidente dans la résistance à la flexion seulement en supposant qu'avec les étriers verticaux (poutre *T*1) les contraintes de compression σ_2 étaient beaucoup plus élevées que dans la poutre *T*2.

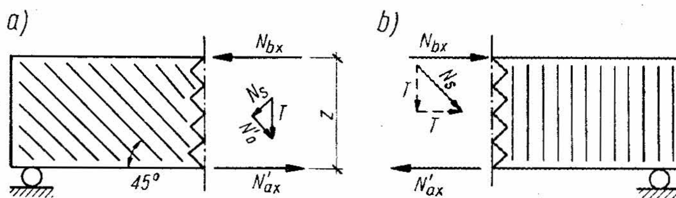


Fig. 5-81. Schéma de détermination des valeurs de N_s et σ_2 [51] :
a) poutre avec des étriers inclinés b) poutre avec des étriers verticaux

$$\left.\begin{aligned} N_{bx} &= \frac{M}{z} = N'_{ax} \\ N_s &= \frac{T}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \sigma_2 = \frac{T}{b_0 z} = \tau_0$$

$$\left.\begin{aligned} N_{bx} &= \frac{M}{z} - \frac{T}{2} \\ N'_{ax} &= \frac{M}{z} + \frac{T}{2} \\ N_s &= T\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \sigma_2 = 2\frac{T}{b_0 z} = 2\tau_0$$

Les valeurs théoriques des contraintes σ_2 dans ces deux cas peuvent être calculées approximativement à partir de la condition d'équilibre des efforts internes et des contraintes dans les parties des poutres fictivement séparées au voisinage des appuis, en supposant que les efforts dans la membrure comprimée supérieure et dans la membrure tendue inférieure sont parallèles (fig. 5-81). Il résulte de cette figure que, par utilisation d'étriers inclinés à 45°, la valeur des contraintes $\sigma_2 = \tau_0$ était deux fois plus petite que $\sigma_2 = 2\tau_0$ dans le cas des étriers verticaux.

La différence entre les contraintes effectives σ_2 dans ces cas n'atteint pas 100 % ; néanmoins elle est importante. C'est ce qui ressort des résistances constatées des poutres $T1$ et $T2$ et aussi des mesures des contraintes (fig. 5-82).

La rupture de la poutre $T1$ s'est manifestée dans sa partie droite où étaient employés des étriers crénelés; au contraire, dans la poutre $T2$ la rupture a eu lieu dans la partie gauche avec des étriers lisses.

La figure 5-83 représente les ouvertures maximales et moyennes des fissures obliques dans la zone d'appui et les ouvertures des fissures dues à la flexion sur le segment entre les deux forces concentrées de la charge. Nous voyons que les ouvertures des fissures dues au cisaillement, avec les étriers inclinés à 45°, sont dans toutes les étapes de la mise en charge

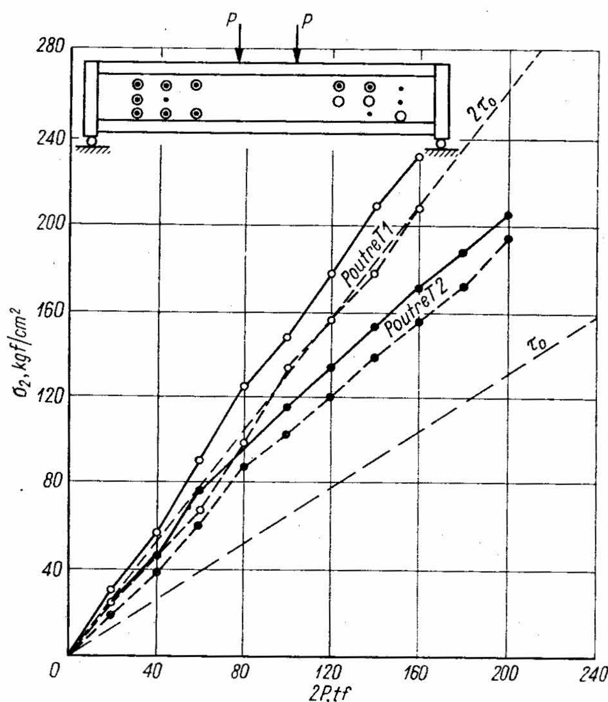


Fig. 5-82. Valeurs des contraintes σ_2 calculées et mesurées dans les poutres $T1$ et $T2$ sous des charges différentes [51]

○ — points de mesure dans la poutre $T1$

● — points de mesure dans la poutre $T2$

inférieures aux ouvertures des fissures dues à la flexion. Or, dans le cas des étriers verticaux la relation est inverse. Sous la charge d'utilisation l'ouverture des fissures obliques dans la poutre $T2$ avec les étriers inclinés était de 0,03 à 0,09 mm, et dans le cas des étriers verticaux dans la poutre $T1$ on a trouvé respectivement $w = 0{,}10$ à 0,24 mm. Les premières fissures inclinées ont été observées simultanément avec les fissures dues à la flexion sous la charge

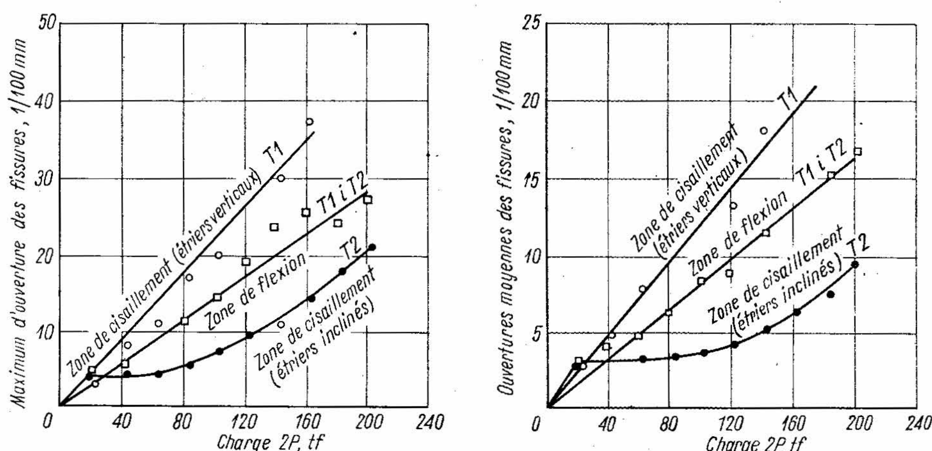


Fig. 5-83. Ouvertures des fissures obliques dans les cas d'étriers verticaux et inclinés à 45° [51]

$2P = 20$ tf, donc sous la contrainte $\tau_0 \approx 13$ kgf/cm². Les essais ont permis de constater que dans les poutres $T1$ et $T2$, où le cisaillement a été transmis à 100 % par l'armature, sous la charge d'utilisation les fissures obliques ont pénétré beaucoup plus profondément dans la poutre que les fissures verticales sur le segment où $M = C^{te}$; elles sont entrées dans la zone dite comprimée située au-dessus de la ligne des contraintes σ_x nulles.

Les contraintes dans les étriers ont été déterminées en se basant sur des mesures de déformations pour être ensuite comparées avec les contraintes calculées d'après la théorie classique

$$\sigma_{te}^0 = \frac{\tau_0}{\overline{\omega}_v} = \frac{\tau_0 b_0 t \sin\theta}{A'_{af}}.$$

Dans ces deux poutres, les contraintes effectives σ_{te} dans les étriers étaient inférieures aux valeurs calculées σ_{te}^0, et cette relation s'est maintenue pendant la mise en charge jusqu'à la rupture. La différence entre σ_{te}^0 et σ_{te} était de 750 kgf/cm² dans la poutre $T1$ et de 600 kgf/cm² dans la poutre $T2$. Au moment de la rupture les contraintes dans les étriers de la poutre $T1$ étaient de 3300 kgf/cm² en moyenne et dans la poutre $T2$, 4400 kgf/cm² environ ($Q'_{a0,2} = 4270$ à 4350 kgf/cm²) ; les contraintes calculées dans cette dernière poutre étaient $\sigma_{te}^0 = 5700$ kgf/cm². Des déformations des armatures qui ont été mesurées on peut déduire que l'acier des étriers dans la poutre $T2$ a atteint en quelques points la limite d'élasticité.

La figure 5-84 indique les contraintes mesurées et calculées dans les étriers des poutres *T*1 et *T*2 en fonction de la charge ; ces mesures ont été prises au milieu d'un segment de 2,5 m de longueur.

Les contraintes effectives dans les étriers sont toujours situées au-dessous des valeurs calculées. Cela pourrait s'expliquer par le fait qu'une partie de l'effort tranchant a été transmise, suivant le schéma d'une poussée et d'un tirant, directement sur l'appui. Cette explication a été confirmée par les contraintes plus élevées dans la membrure tendue et dans les bielles en béton séparées par les fissures obliques.

Des essais de LEONHARDT et WALTHER il résulte qu'en principe il n'est pas nécessaire de dimensionner les sections transversales de manière que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\tau^{1}_{0max} \leqslant \sigma',$$

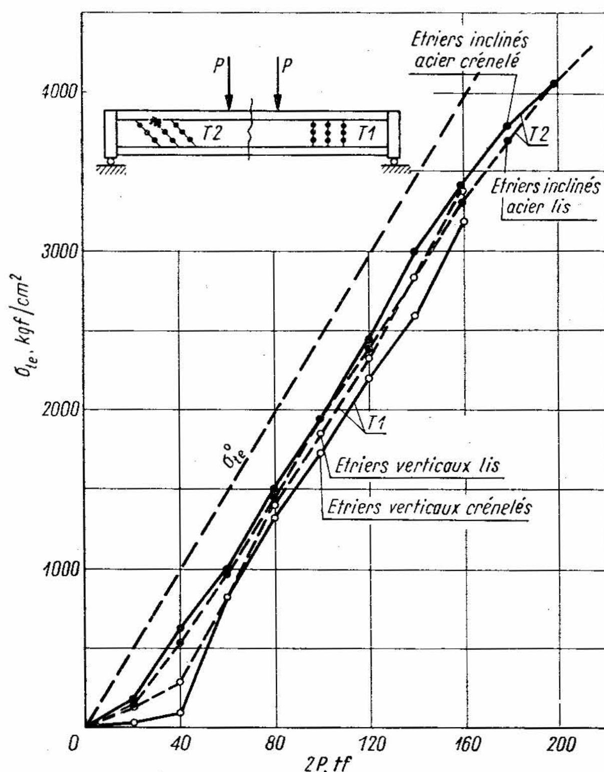


Fig. 5-84. Contraintes dans les étriers des poutres *T*1 et *T*2 [51]

T_1 T_2
○——● étriers crénelés
○·······● étriers lisses

car cette condition, malgré les hypothèses admises, n'exclut pas l'ouverture des fissures obliques. De plus, la technologie nouvelle, basée sur la vibration du béton et l'emploi des aciers de haute qualité, exclut dans la plupart des cas de faire appel nécessairement à des sections importantes, calculées en vue d'accroître la place réservée aux armatures. Dans ce cas LEONHARDT propose une augmentation considérable de τ_{0max}^{1} au-dessus des valeurs actuelles prescrites par les règlements. De plus, il propose non seulement d'établir des relations entre τ_{0max}^{1} et la résistance du béton mais aussi de tenir compte de l'élancement de cisaillement $\frac{M}{Th}$ ou bien de $\frac{l}{h}$ et de pourcentage de cisaillement transmis par l'armature transversale. La proposition de LEONHARDT est indiquée sur la figure 5-85.

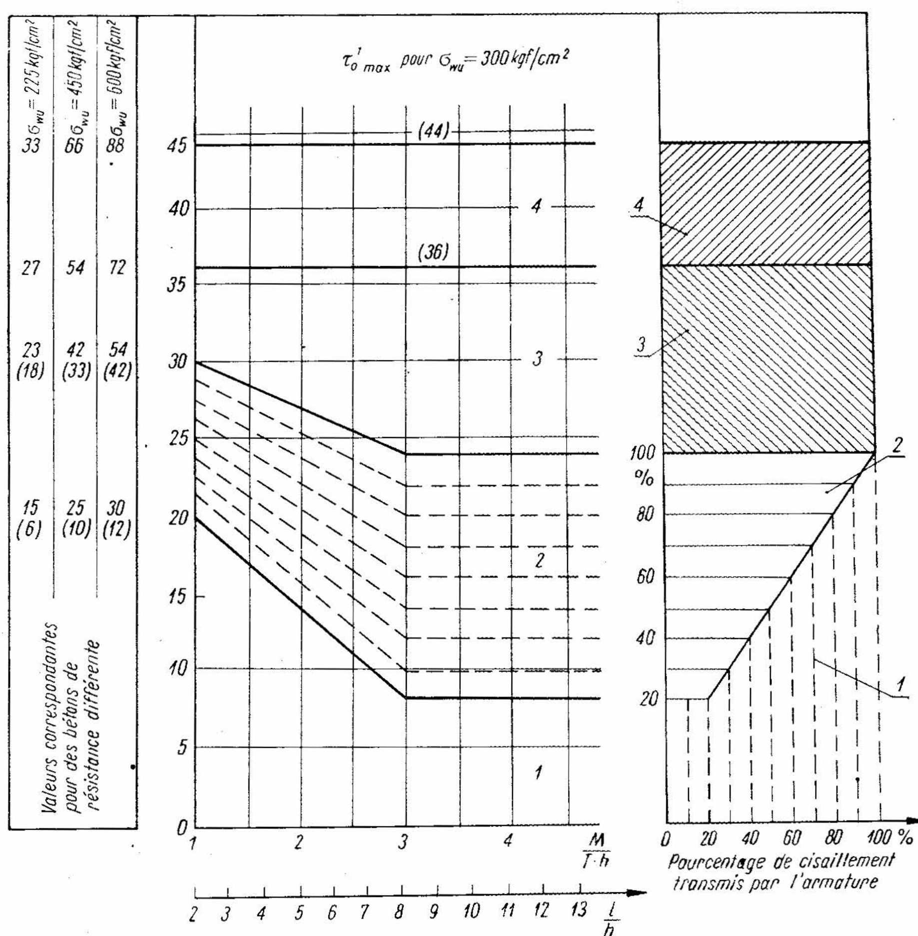


Fig. 5-85. Contraintes τ_0^1 et $\tau_{0\,max}^1$ dans le cas d'une armature crénelée

1 — armature de construction, 2 — cisaillement transmis partiellement par l'armature, 3 — cisaillement transmis totalement par l'armature, 4 — cisaillement transmis totalement par l'armature très serrée et dirigée suivant $\sigma_1(\pm 15°)$

5.6. PARTICIPATION DE L'ARMATURE LONGITUDINALE A LA TRANSMISSION DE L'EFFORT TRANCHANT

L'apparition des fissures en général, et des fissures obliques en particulier, conduit à une modification fondamentale de la disposition des efforts internes. Après l'ouverture d'une fissure oblique les contraintes inclinées n'y apparaissent pas, et l'équilibre de la partie de la poutre voisine de l'appui (fig. 3-11) est assuré par l'action des forces extérieures ou bien de leur résultante T et des efforts internes N'_a et N_b. Ces trois forces doivent se couper en un seul point et, par conséquent, les directions des efforts N_b et N'_a sont inclinées par rapport à l'axe de la poutre, comme on le voit sur la figure 3-11. L'ouverture de la fissure et la rotation des deux parties de la poutre autour d'une articulation dans la zone comprimée provoque la déformation de l'armature longitudinale, représentée d'une manière un peu exagérée sur la figure 5-86a. Etant donnée l'inclinaison de l'effort N'_a, l'armature

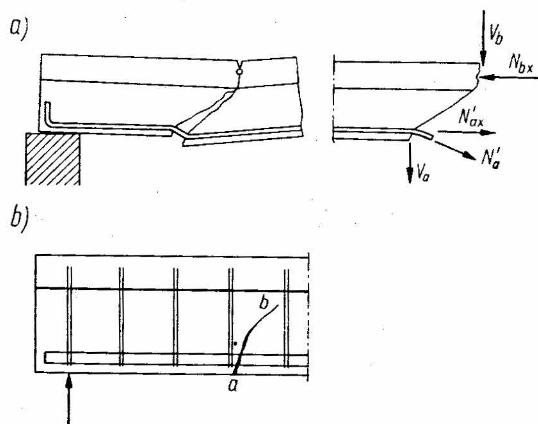


Fig. 5-86. Fissuration dans la zone de cisaillement : a) disposition des efforts dans l'armature principale dans la zone de la fissure oblique, b) fissure oblique située entre les étriers

longitudinale de la partie gauche de la poutre tend à se détacher de la nervure. Cette direction de l'effort N'_a a pour résultat une composante V_a dont la valeur maximale est limitée par la résistance du béton à la traction et par la distribution des armatures près de la face inférieure. Quand la valeur $V_{a\,max}$ est dépassée, l'ouverture d'une fissure horizontale se produit au niveau de l'armature principale (fig. 3-12), ce qui entraîne la disparition ou au moins une réduction considérable de l'effort V_a. Sur la longueur de la fissure horizontale le manque d'adhérence du béton à l'acier conduit finalement à une rupture par glissement (en allemand, « Gleitbruch », en anglais, « bond failure »), liée à un glissement des armatures dans l'ancrage à l'appui.

Dans le cas d'une poutre munie d'étriers, peut se produire une situation identique à celle d'une poutre sans armatures transversales, quand la fissure oblique dans une certaine

phase de charge est située entre les étriers (fig. 5-86b). La charge augmentant, la fissure inclinée s'allonge et peut traverser un étrier. Dans ce cas une partie correspondante de l'effort tranchant est transmise par l'étrier, et le reste, par les armatures longitudinales et par la zone comprimée du béton. La relation entre $V_{a\,max}$ et la capacité portante peut être importante dans certains cas et c'est pourquoi au moins l'ordre de grandeur de $V_{a\,max}$ et les facteurs en question doivent être connus. Etant donné qu'aucune considération théorique ne peut fournir de réponse valable, nous présentons ci-après les résultats des essais expérimentaux concernant ce problème.

5.6.1. ESSAIS DE JONES

JONES a été le premier à décider de déterminer les valeurs des efforts V_b et V_a par des mesures directes. Dans ce but il a essayé une poutre comportant une fissure artificielle qui traversait la section dans toute sa hauteur (fig. 5-87). Des jauges à fil résistant ont été collées sur l'armature longitudinale et sur les étriers inclinés pour mesurer les déformations

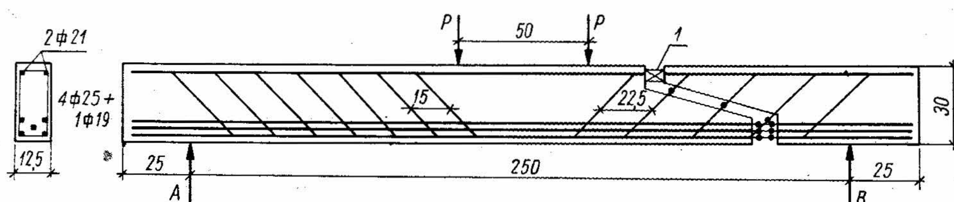


Fig. 5-87. Poutre en béton armé avec une fissure oblique artificielle dans les essais de JONES

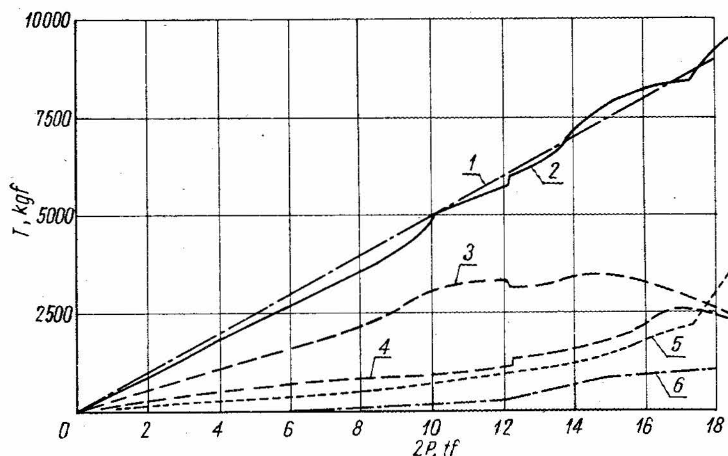


Fig. 5-88. Résultats des essais de JONES

1 — effort tranchant calculé, 2 — effort tranchant mesuré, 3 — partie d'effort tranchant transmise par les étriers, 4 — partie d'effort tranchant transmise par l'armature principale, 5 — partie d'effort tranchant transmise par l'armature longitudinale de la zone comprimée, 6 — partie de l'effort tranchant transmise par la zone comprimée du béton (V_b)

de ces barres. Dans la zone comprimée on a placé les appareils mécaniques *1* qui permettaient d'y déterminer directement les efforts transversal et longitudinal. Les résultats obtenus par JONES [40] sont ici représentés sous forme de diagrammes sur la figure 5-88. Dans la première phase de charge les étriers inclinés transmettaient environ 60 % de l'effort tranchant total, tandis que le reste, donc 0,4 T, était transmis par le béton de la zone comprimée et les armatures longitudinales. Sous la charge de 12,2 tf correspondant à la plastification de l'acier dans les étriers il y eut une petite, mais brusque, chute de l'effort tranchant transmis par les étriers (fig. 5-88).

Sous la charge de 17,0 tf les étriers inclinés ont transmis environ 0,33 T, les armatures horizontales tendues environ 0,30 T, l'acier dans la zone comprimée 0,24 T et le béton dans la zone comprimée environ 0,15 T. La limite de résistance à la flexion a été atteinte pour la charge $2P = 18{,}5$ tf.

Pour déterminer la valeur limite de l'effort V_a, appelé par certains chercheurs allemands « Verdübelungskraft », JONES a proposé la formule suivante déduite de ses essais

$$V_{a\,max} = 0{,}7\sigma' \sqrt[4]{z' I b_2^3}\,, \tag{5.14}$$

où : σ' est la résistance du béton à la traction,

z', la distance du centre de gravité des armatures comprimées à la face supérieure des armatures tendues,

I, le moment d'inertie de la couche de béton de revêtement sur les armatures tendues par rapport à l'axe central de cette couche,

$b_2 = b - \Sigma Ø$;($Ø$ étant le diamètre des barres de l'armature principale). Si l'on emploie les étriers, b_2 doit être augmenté proportionnellement à leur participation à la transmission des efforts par les étriers tendus.

Malgré que la fissure artificielle ait introduit certaines perturbations dans le comportement d'une poutre ordinaire, les capacités portantes d'une poutre avec une fissure artificielle et d'une poutre ordinaire sans fissure étaient approximativement du même ordre de grandeur.

5.6.2. ESSAIS DE WATSTEIN ET MATHEY

Le programme des essais [82] comportait six poutres à sections rectangulaires sans armature transversale. La valeur de l'effort V_a a été déterminée d'après la condition d'équilibre d'une partie de la poutre voisine de l'appui et séparée par la fissure oblique (fig. 5-89). L'effort de traction N_a' dans la fissure, ou bien dans le voisinage immédiat, a été trouvé en se basant sur les mesures des déformations.

Le bras de levier z du couple des efforts internes a été déterminé en supposant que l'effort N_b est situé à mi-hauteur de la zone comprimée dans la section transversale au-dessus de la fissure oblique. Les valeurs des efforts V_a obtenues ainsi pour les cinq poutres expérimentales sont indiquées sur la figure 5-90. On y voit que l'effort tranchant transmis par les armatures principales tendues est d'autant plus grand que le pourcentage de cette armature est plus élevé. Sous la charge de l'ordre de 0,45 P_u la valeur de $V_{a\,max}$ était comprise dans les limites de 38 à 74 % de l'effort tranchant total appliqué à ce moment-là

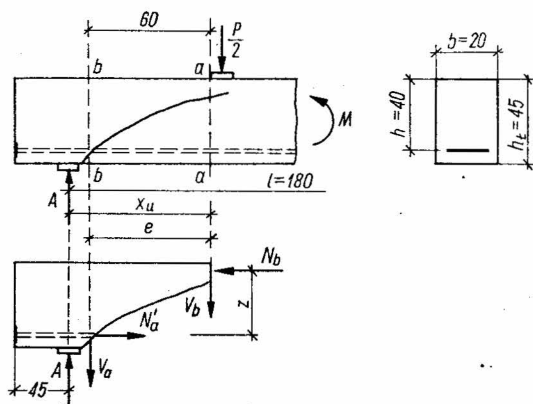


Fig. 5-89. Schéma des efforts internes d'après WATSTEIN et MATHEY

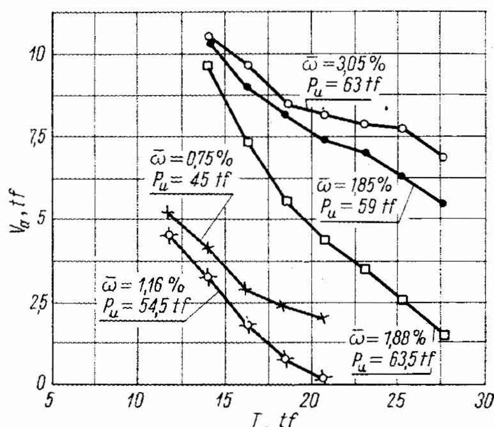


Fig. 5-90. Participation de l'armature principale dans la transmission de l'effort tranchant, d'après les essais de WATSTEIN et MATHEY

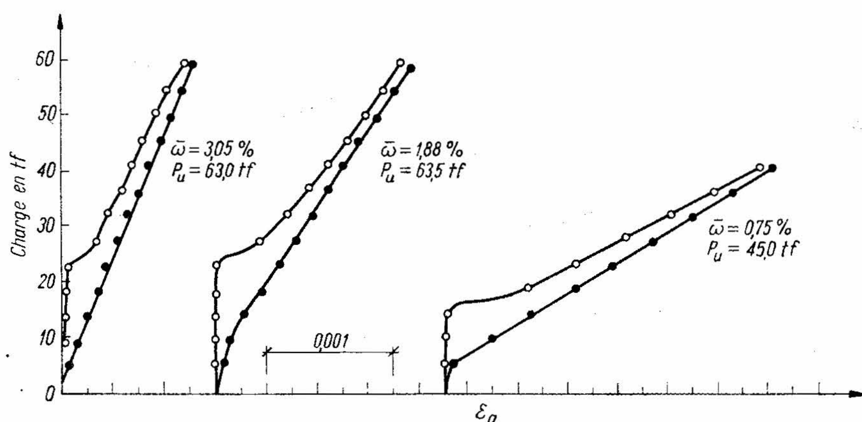


Fig. 5-91. Déformations de l'armature principale [82]
—○—déformations dans une section située à 7,5 cm de l'appui,
—●—déformations au centre de la travée

à la section considérée. De ces essais il résulte également que la valeur de V_a trouvait son maximum au moment où la fissure atteignait le plan d'action de la force concentrée. La charge augmentant ultérieurement, la valeur de V_a diminuait.

Les mesures des déformations de l'acier ont été effectuées en deux endroits : à 7,5 cm de l'appui et au milieu de la travée. La figure 5-91 indique les résultats de ces mesures pour trois poutres dont les volumes de l'armature principale étaient différents $\bar{\omega} = 3{,}05\ \%$; $\bar{\omega} = 1{,}88\ \%$; $\bar{\omega} = 0{,}75\ \%$. L'allongement de l'armature près de l'appui était faible au début, mais il a augmenté rapidement après l'ouverture d'une fissure oblique. Les déformations

de l'acier dans la zone voisine de l'appui et au milieu de la travée étaient du même ordre de grandeur au moment de l'épuisement de la capacité portante. On a constaté de plus que dans la zone de cisaillement les contraintes maximales de compression ne se manifestaient pas près de la face supérieure de la poutre mais à une certaine distance de cette face. Cette distance augmente quand la section considérée est située plus près de l'appui, et la force P tend vers la valeur P_u.

Il résulte de ces considérations que l'ouverture d'une fissure oblique change de manière brutale la disposition des efforts internes dans la poutre en produisant l'effet du schéma d'un arc avec un tirant.

5.6.3. ESSAIS DE KREFELD ET THURSTON

Les essais [44] comprenaient 9 poutres de section rectangulaire sans armature transversale. Pour déterminer la valeur de V_a les poutres en question ont été réalisées d'une façon très particulière, indiquée sur la figure 5-92. Avant de bétonner toute la poutre et après avoir mis en place dans le coffrage l'armature principale on a exécuté un bloc en béton de 60 cm de longueur et de 20 cm de hauteur. Les plans inclinés du bloc à la hauteur de 10 cm devaient jouer le rôle des fissures obliques.

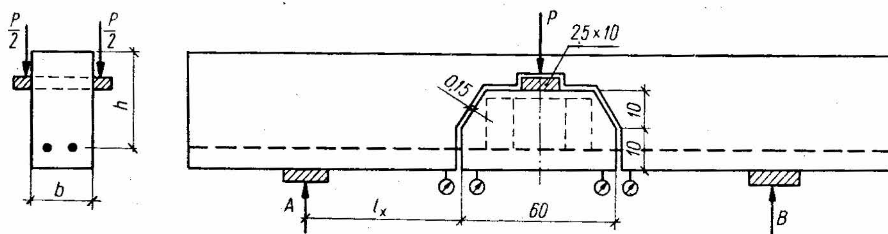


Fig. 5-92. Poutre dans les essais de KREFELD et THURSTON

Vingt-quatre heures après le bétonnage du bloc ses faces frontales ont été recouvertes d'asphalte et d'une couche isolante à base de poix. Ensuite, on a bétonné la poutre en laissant au-dessus du bloc un vide de dimensions 2,5 × 10 cm pour une platine en acier qui supportait la charge pendant l'essai (fig. 5-92). Cette méthode de mise en charge a permis une mesure directe de la force V_a dans la fissure artificielle.

La hauteur utile de toutes les poutres était la même : $h = 25$ cm. La largeur des poutres, variable : $b = 15$ cm et $b = 20$ cm, l'armature : de 2 Ø 22,2 mm ou de 2 Ø 28,6 mm, l'épaisseur de la couche de revêtement de l'acier : 5 et 12,5 cm, les portées des poutres : 1,20, 1,50, 1,80 et 2,10 m. A cause de la longueur variable des poutres la distance l_x entre l'appui et la fissure oblique était également différente et égale à 30, 45, 60 et 70 cm, respectivement.

Au moyen des jauges mécaniques situées des deux côtés de la fissure artificielle on a mesuré le déplacement relatif Δy des armatures principales des deux côtés de la fissure.

Le diagramme ainsi obtenu pour une poutre est représenté à titre d'exemple sur la figure 5-93. Le sommet de la courbe correspond à la valeur maximale de la force V_a.

KREFELD et THURSTON ont examiné également des poutres sans fissures artificielles, de mêmes armatures et dimensions. La comparaison des résultats a montré que la force V_a mesurée dans les poutres comportant une fissure artificielle était égale à $1/3\ T_u$ des poutres ordinaires, T_u désignant l'effort tranchant correspondant à l'ouverture d'une fissure horizontale au niveau de l'armature principale. L'apparition d'une fissure horizontale indiquait l'approche de l'épuisement de la capacité portante ; cela s'est manifesté surtout dans les poutres élancées.

De ces essais il résulte que la valeur de V_a augmente avec l'accroissement d'épaisseur de la couche de revêtement en béton sur les armatures principales et qu'elle diminue avec l'augmentation de la distance entre la fissure oblique et l'appui.

Sur la base de ces essais les auteurs ont proposé la formule suivante pour calculer la valeur de l'effort

$$V_a = \frac{C\sqrt{\sigma_{cyl}}\,\sqrt[4]{hIb_2^3}}{2+a_1\sqrt[4]{\dfrac{b_2}{Ih}}}, \qquad (5.15)$$

où : b est la largeur de la poutre,

a_1, la longueur de la fissure,

C, une constante déterminée par l'expérience.

Les valeurs dans la relation (5.15) sont les mêmes que celles indiquées précédemment pour la formule (5.14). Pour $a_1 = 0$ la relation prend la forme proposée par JONES

$$V_a = C_1\sqrt{\sigma_{cyl}}\cdot\sqrt[4]{hIb_2^3}.$$

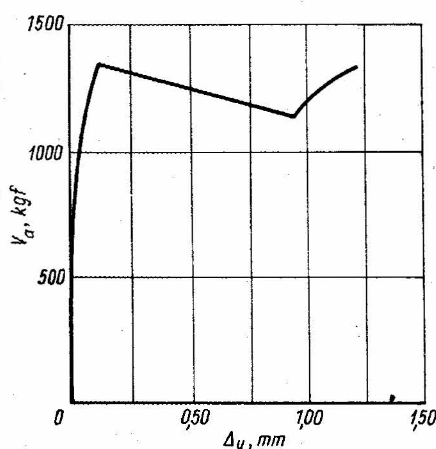


Fig. 5-93. Déplacement relatif des armatures principales en fonction de la valeur de V_a [44]

L'influence de la distance x_u entre la fissure oblique et l'appui peut être considérée en multipliant le côté droit de cette formule par la valeur du rapport $\dfrac{a_1}{x_u}$.

Pour déterminer la partie de l'effort tranchant transmise par l'acier dans les phases consécutives à la mise en charge et celle transmise par la zone comprimée du béton, KREFELD et THURSTON ont effectué des essais supplémentaires sur une poutre, représentée sur la figure 5-94. Dans cette poutre, pendant son bétonnage, on a préparé une fente de 7 cm de largeur ressemblant, à l'intérieur, à une fissure oblique. Dans cette fente, sur les faces supérieure et inférieure des armatures principales, on a collé des jauges à fil résistant pour mesurer les déformations de ces armatures. Pour les mesures des déformations du béton de la zone comprimée on a collé deux rosettes de jauges à fil résistant 1 sur la face latérale de la poutre. Une de ces rosettes a été placée directement au-dessus de la fissure oblique, l'autre à la distance de 15 cm de la première (fig. 5-94). On a mesuré, en outre,

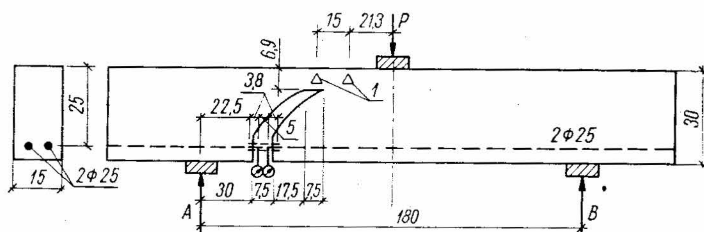


Fig. 5-94. Poutre avec une fente en forme de fissure oblique dans les essais de KREFELD et THURSTON

les déplacements verticaux des armatures sur les deux bords de la fente, par des jauges mécaniques.

Se basant sur les mesures des déformations et des déplacements de l'acier et du béton on a déterminé la valeur et la direction de l'effort dans les armatures principales et les contraintes σ_x et τ_{xy} dans la section de la zone comprimée du béton au-dessus de la fente. Les résultats de ces mesures sont représentés sur la figure 5-95 où les valeurs de V_b et V_a sont indiquées en fonction de la charge.

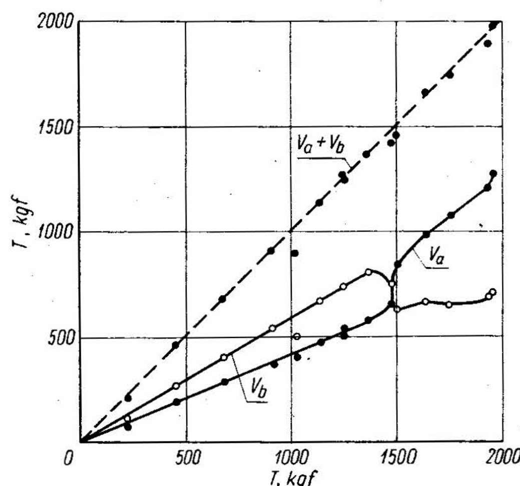


Fig. 5-95. Valeurs de l'effort tranchant transmis par le béton (V_b) et par l'armature principale (V_a) en fonction de la charge [44]

Dans la première phase de mise en charge, l'effort tranchant T a été transmis pour 60 % par le béton et pour 40 % par l'armature principale dans la zone tendue. Avec un effort tranchant égal à $T \approx 1{,}5$ tf, à cause d'un changement brusque de la disposition des efforts internes, on a observé des perturbations dans ces deux courbes ; ces phénomènes peuvent être attribués à l'ouverture d'une fissure horizontale près du bord supérieur de la fente. La charge augmentant encore, le béton transmettait 38 % de l'effort tranchant et les armatures longitudinales, 62 %.

Cette poutre, conçue par KREFELD et THURSTON, ne correspondait pas entièrement à une poutre ordinaire en béton armé ; cela est apparu par les modifications de sa déformée et sa petite capacité portante. Néanmoins, les essais ont indiqué qu'une partie considérable de l'effort tranchant peut être transmise par les armatures principales situées dans la zone tendue.

5.7. POUTRES EN BÉTON ARMÉ AVEC DES NERVURES PERPENDICULAIRES PRÉFABRIQUÉES (ESSAIS DE L'AUTEUR)

Dans la pratique de la construction on utilise fréquemment des nervures de plancher préfabriquées, « noyées » dans une poutre-maîtresse en béton armé coulé sur place (fig. 5-96). Les abouts des nervures préfabriquées étant le plus souvent en béton de qualité supérieure, ceux-ci ne produisent aucune diminution de la capacité portante de la zone comprimée de la poutre. En conséquence, dans le calcul à la flexion on peut sans crainte considérer la section rectangulaire *bh*. Par contre, dans le dimensionnement des sections pour l'effort tranchant, ou, plus précisément, pour les contraintes principales de traction, on ne peut pas supposer *a priori* que les abouts des nervures préfabriquées, bétonnés dans la poutre-maîtresse coulée sur place, ne provoquent pas une diminution de la capacité portante de celle-ci et une augmentation du danger de propagation des fissures obliques. Si l'on met les nervures préfabriquées en béton durci dans le béton frais d'une poutre, c'est équivalent à l'introduction d'un corps étranger. Les abouts préfabriqués ne subissent pas de retrait et même, sous l'influence de l'humidité provenant du béton frais, ils peuvent gonfler et produire ainsi des contraintes de traction σ_R dans la poutre (fig. 5-97). Ces contraintes varient avec le temps, leurs valeurs étant les résultantes de plusieurs facteurs, notamment du retrait qui les augmente et de la relaxation qui les réduit.

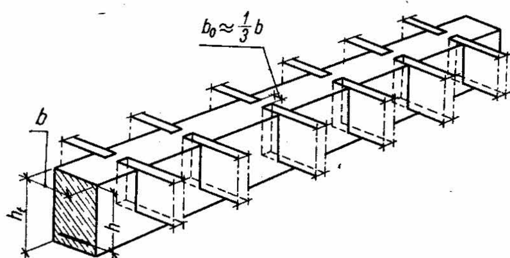


Fig. 5-96. Poutre-maîtresse en béton armé avec les nervures préfabriquées

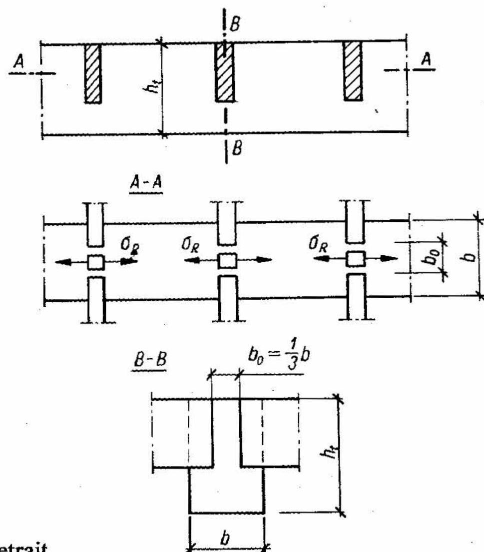


Fig. 5-97. Action des contraintes de traction dues au retrait

Nous ne savons pas dans quelle mesure les contraintes σ_R causent une augmentation des contraintes principales, en diminuant la capacité portante de la poutre. Il y a un problème important pour le projeteur : quelle est la largeur « b » qui doit être considérée dans le calcul des contraintes τ pour le dimensionnement de la poutre d'après la méthode classique, ou bien quelle largeur « b » doit être employée pour déterminer les valeurs T^k et T^k_{max} dans la méthode de la capacité portante limite. Si l'on suppose la largeur de calcul $b_c = \frac{b}{3} = b_0$ (fig. 5-97), la contrainte τ augmente trois fois et, en conséquence, on obtient non seulement une armature excessive de la poutre, mais souvent il faut augmenter sa section ; cela intervient dans les cas où l'hypothèse $b_c = b$ permet d'obtenir $\tau < \tau_1$. Les projeteurs, incités à maintenir la sécurité des éléments et ne trouvant pas de données expérimentales et théoriques dans les publications relatives à ce domaine, ont admis dans leurs calculs une largeur de la poutre-maîtresse égale à la distance entre les plans frontaux des nervures préfabriquées.

Pour expliquer, au moins partiellement, ce problème fréquent dans la pratique, l'auteur a effectué des essais sur deux séries de poutres-maîtresses en béton de résistance 185 kgf/cm^2 et 300 kgf/cm^2. Les résultats de ces essais, réalisés en 1963 au Laboratoire de Résistance des Matériaux, près de la Chaire de Constructions en Béton Armé de l'Ecole Polytechnique de Gdańsk, publiés précédemment dans [23] et [24], sont présentés ci-après.

A. PROGRAMME DES ESSAIS

Forme et armature des poutres examinées

Les essais ont eu pour but de répondre à la question si le comportement d'une poutre avec des nervures préfabriquées était voisin de celui d'une poutre de mêmes dimensions extérieures ou bien de celui d'une poutre de largeur réduite b_0. Les essais ont été effectués sur les poutres de deux séries en béton de résistance 185 kgf/cm^2 et 300 kgf/cm^2 ; la forme des poutres et la disposition de l'armature sont indiquées sur la figure 5-98.

Les poutres examinées étaient désignées par les symboles suivants :

P-185 : poutre rectangulaire en béton de résistance 185 kgf/cm^2,

K-185 : poutre avec prismes préfabriqués, en béton de résistance 185 kgf/cm^2,

I-185 : poutre en forme de double T, en béton de résistance 185 kgf/cm^2.

Pour les poutres de la série *II* on a employé les mêmes symboles ; le nombre « 300 » indique qu'il s'agit alors d'un béton de résistance 300 kgf/cm^2.

La poutre *K* correspond par exemple à une poutre-maîtresse en béton armé de portée 5,60 m avec des nervures préfabriquées du type DMS, espacées de 65 cm.

A cause des conditions techniques du laboratoire les dimensions linéaires ont été réduites deux fois. Les trois poutres dans chaque série ont été munies de la même armature transversale et de la même armature longitudinale dans la zone tendue (fig. 5-98). L'armature de la zone comprimée dans les poutres en forme de double T (symbole *I*) a été complétée par des barres supplémentaires en quantité telle que la résistance à la compression de cette zone soit approximativement du même ordre de grandeur que celle des poutres rectangulaires *P* et *K*. Ce renforcement des poutres en forme de T, qui a compliqué sans doute les comparaisons des résultats des essais, a été toutefois nécessaire afin d'éviter la

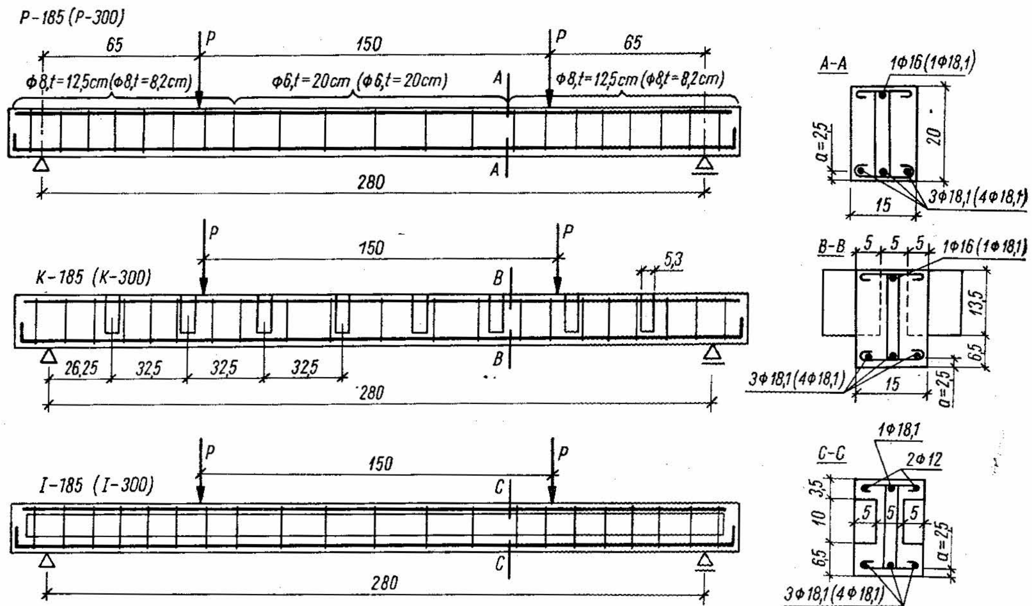


Fig. 5-98. Poutres de la série *I* (σ^0_{cyl} = 185 kgf/cm²) et de la série *II* (σ^0_{cyl} = 300 kgf/cm²) dans les essais de l'auteur

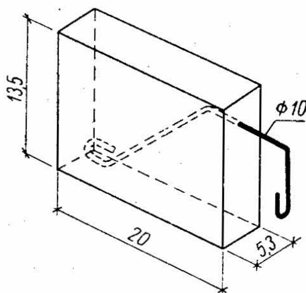


Fig. 5-99. Prisme en béton armé qui remplace une extrémité d'une nervure préfabriquée

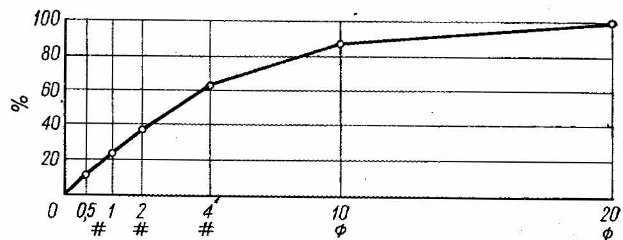


Fig. 5-100. Courbe granulométrique de l'agrégat, employé dans le béton des poutres, séries *I* et *II*

rupture prématurée de ces poutres, surtout dans la zone du moment fléchissant maximal et non dans la zone où les contraintes principales inclinées de traction jouaient un rôle décisif.

L'armature des poutres a été conçue de telle manière que la rupture ait lieu dans la zone des efforts tranchants maximaux.

Les prismes en béton, dont la forme et l'armature sont indiquées sur la figure 5-99, ont été bétonnés deux mois plus tôt ; leur résistance au moment du bétonnage des poutres était égale à 220 kgf/cm².

Matériaux employés

Les compositions des bétons employés étaient les suivantes :

Béton de résistance de 185 kgf/cm^2 :

agrégat séché : 2000 kg/m^3,
ciment de qualité « 350 » : 240 kg/m^3,
eau : 145 l/m^3.

Béton de résistance de 300 kgf/cm^2 :

agrégat séché : 1950 kg/m^3,
ciment de qualité « 350 » : 320 kg/m^3,
eau : 167 l/m^3.

La courbe granulométrique de l'agrégat utilisé pour ces deux bétons est indiquée sur la figure 5-100.

Les poutres étaient armées d'acier crénelé de Ø 18,1 mm et Ø 12 mm, de limite d'élasticité égale à 3600 kgf/cm^2 environ, et d'acier lisse de Ø 16, 12, 10, 8 et 6 mm, de limite d'élasticité égale à 2500 à 2850 kgf/cm^2.

Description des essais

Le dispositif de mise en charge employé est représenté sur la figure 5-101. Il permettait d'obtenir une force correspondant à la charge choisie et indépendante des flèches des poutres examinées. Les flèches des poutres ont été mesurées au moyen de 7 jauges mécaniques. L'influence du poids propre de la poutre sur sa flèche et sur l'état de contrainte a été négligée comme étant petite. Le premier palier de charge était égal à 600 kgf en chacun des deux points de la charge concentrée. Les paliers successifs étaient égaux à 250 kgf pour chaque point et cette charge était maintenue invariable pendant 15 minutes. Le développement des fissures a été observé à l'oeil nu et avec une loupe de grossissement 5.

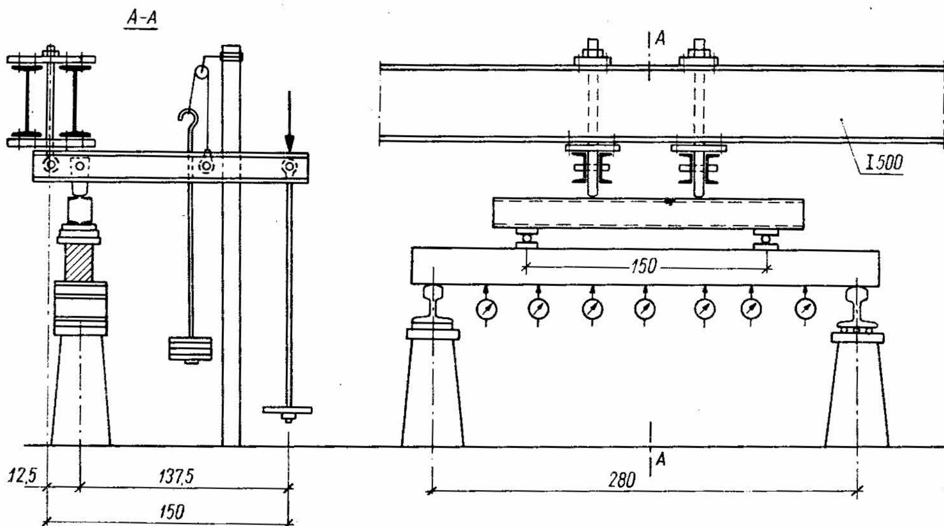


Fig. 5-101. Dispositif de mise en charge des poutres

B. Morphologie des fissures et analyse de la résistance

Poutre P-185

D'après la répartition des fissures, représentée sur la figure 5-102, on voit que la première fissure due à la flexion était ouverte au centre de la travée sous la force $P_f = 1{,}78$ tf, correspondant au moment de fissuration $M_f = 1{,}78 \cdot 0{,}65 \approx 1{,}16$ tfm. Pour cet état de charge, les contraintes des armatures dans la zone de traction, calculées d'après la théorie NL, étaient $\sigma_a^0 \approx 470$ kgf/cm² et l'allongement unitaire du béton ε_b sur la face tendue était de 0,0003.

La première fissure inclinée a été observée sous la charge $P_{rf1} = 2{,}9$ tf. Cette fissure a pu s'ouvrir un peu plus tôt, pendant l'augmentation de la charge dans l'intervalle $P = 2{,}65$ à 2,9 tf ($\Delta P = 250$ kgf). Dans cette situation, on peut supposer que l'ouverture d'une fissure oblique était associée aux contraintes de cisaillement suivantes

$$\tau_{rf1} = \frac{P - \dfrac{\Delta P}{2}}{bz} = \frac{2900 - \dfrac{250}{2}}{15 \cdot 0{,}85 \cdot 17{,}5} = 12{,}4 \text{ kgf/cm}^2.$$

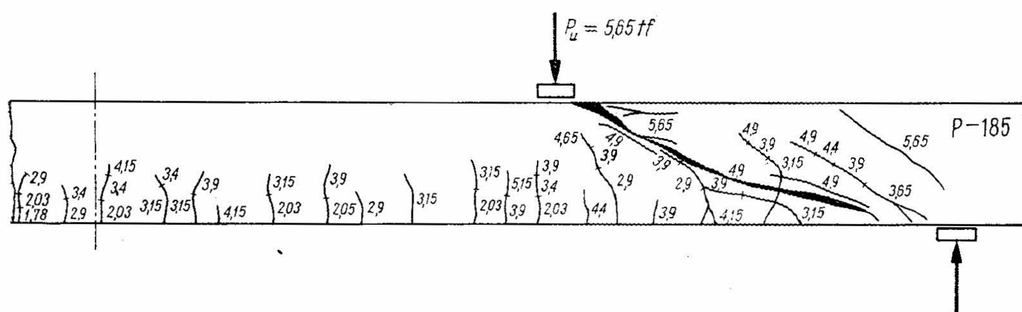


Fig. 5-102. Fissuration de la poutre *P*-185 sous la charge $P_u = 5{,}65$ tf

L'augmentation ultérieure de la charge a provoqué l'ouverture d'une seconde fissure oblique au niveau de l'axe neutre, avec les contraintes $\tau = 17{,}0$ kgf/cm². Cela prouve que dans l'analyse des contraintes du béton dans la zone de cisaillement on doit tenir compte d'une grande dispersion des résultats expérimentaux. C'est pourquoi l'auteur a proposé au paragraphe 2.3.7 une généralisation de l'hypothèse de Mohr en remplaçant la courbe limite $F(\tau, \sigma)$ par une zone limite.

La figure 5-103a représente une partie de la poutre *P*-185, voisine de l'appui et séparée par une fissure oblique, au moment de l'épuisement de la capacité portante ($P_u = 5{,}65$ tf). La fissure qui a produit directement la rupture était inclinée d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport au niveau. Suivant la terminologie de Mörsch, cette fissure était appelée fissure oblique secondaire. Son ouverture montre que l'armature principale dans la zone d'appui était considérablement surchargée. D'après Mörsch, l'ouverture d'une fissure oblique secondaire correspond à une superposition de deux états de contrainte. Le premier provient du treillis fictif où les contraintes dans l'armature principale sont proportionnelles à la valeur du

moment fléchissant (fig. 5-103b — les bielles comprimées inclinées à 45°). Le deuxième état est dû au schéma exerçant une poussée où $\sigma_a = C^{te}$ (fig. 5-103b — une bielle comprimée inclinée à 20°).

Après l'ouverture d'une fissure oblique secondaire les contraintes dans l'armature principale dans la section *c—c* ne peuvent être calculées correctement que d'après la condition d'équilibre statique de la partie de la poutre voisine de l'appui et séparée par une fissure secondaire. En supposant $N_b || N'_a$ (cette supposition étant approximativement juste dans le cas où les étriers traversés par la fissure oblique peuvent transmettre l'effort tranchant total) et admettant les symboles de la figure 5-103a, nous obtenons

$$N'_a = \frac{B}{z}(a-k) = \frac{5{,}65}{15{,}5}(65-23) \approx 15{,}4 \text{ tf.}$$

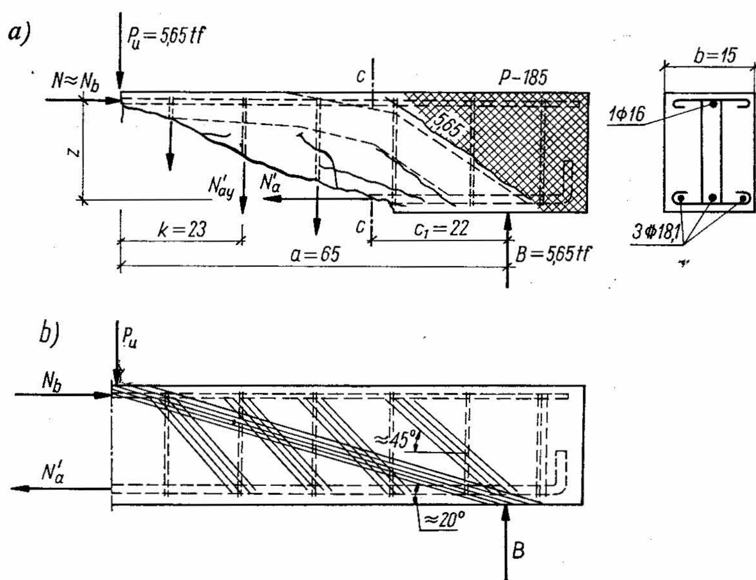


Fig. 5-103. Zone d'appui de la poutre *P*-185 en état de rupture : a) disposition des fissures, b) schéma des efforts

Par contre, si l'on calcule l'effort N'_a en fonction du moment extérieur, on trouve la valeur inférieure suivante

$$N'_a = B\frac{c_1}{z} = 5{,}65\frac{22}{15{,}5} \approx 8{,}0 \text{ tf.}$$

Il résulte de cette analyse que la réduction de l'armature principale vers l'appui, conformément au diagramme des moments fléchissants, pourrait produire l'épuisement de la capacité portante non sous la charge $P_u = 5{,}65$ tf, mais beaucoup plus tôt : au moment de l'ouverture d'une fissure oblique secondaire sous la charge $P = 3{,}9$ tf, comme résultat des contraintes $\sigma_a = Q'_a$ dans l'armature principale.

Une analyse de ce genre de contraintes dans l'acier, fournissant des informations sur l'état de surcharge dans la zone d'appui, peut être très utile dans la pratique.

Il faut rappeler que le comportement d'un schéma exerçant une poussée, ou bien d'un schéma d'arc quand la charge est uniformément répartie, est décisif dans le cas d'une adhérence faible de l'acier au béton. Les essais de WALTHER [79] ont indiqué que dans le cas d'une adhérence très faible, la poutre se comporte presque dès le commencement comme un arc avec tirant. Cela conduit à une valeur constante de l'effort N'_a dans l'armature principale et à une surcharge de la zone d'ancrage. Dans l'état final, même dans les poutres présentant une bonne adhérence (par exemple, les poutres examinées expérimentalement par l'auteur et munies d'acier crénelé), le comportement de la poutre comme un arc est bien évident. La figure 5-103a montre d'une façon nette une partie de la poutre en forme d'arc, découpée par les fissures et située entre les lignes pointillées. Par cette partie de la poutre les efforts de compression étaient directement transmis sur l'appui sous des charges voisines des charges de rupture. Au moment de la rupture pour $P_u = 5{,}65$ tf on a observé un phénomène peu fréquent : éclatement du coin de la poutre qui est libre des contraintes (la zone hachurée indiquée sur la figure 5-103a).

Poutre K-185

La fissuration de la poutre *K*-185 est représentée sur la figure 5-104. Les premières fissures dues à la flexion se sont ouvertes sous l'effort $P_f = 1{,}9$ tf, donc un peu plus tard que dans la poutre *P*-185. Par contre, la première fissure oblique a été ouverte plus tôt, sous l'effort $P_{rf1} = 2{,}4$ tf. L'épuisement de la capacité portante produite par une fissure oblique,

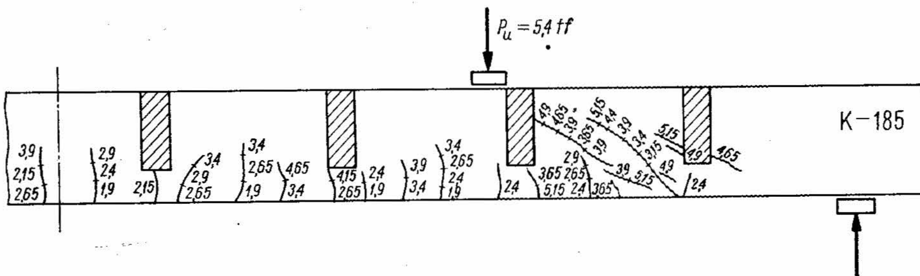


Fig. 5-104. Fissuration de la poutre *K*-185 sous la charge $P_u = 5{,}4$ tf

qui a pénétré presque jusqu'à la face comprimée, a eu lieu sous l'effort $P_u = 5{,}4$ tf, également plus tôt que dans la poutre *P*-185. Cela signifie que les prismes en béton introduits dans la poutre n'ont pas accéléré l'ouverture des fissures dues à la flexion. Toutefois, leur influence négative en ce qui concerne le cisaillement était évidente, aussi bien dans l'ouverture des fissures que dans l'épuisement de la capacité portante.

La figure 5-105 représente la partie de la poutre *K*-185 voisine de l'appui et découpée par une fissure oblique sous la force $P = 4{,}15$ tf. Nous voyons que la fissure oblique est traversée par un étrier double qui, au maximum et dans le cas des contraintes $\sigma_{te} = Q'_{ae} = 2800$ kgf/cm², ne peut transmettre qu'une partie de l'effort tranchant atteignant :

$$N'_{ay1} = A'_V Q_{ae} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 2800 = 2800 \text{ kgf}.$$

L'autre partie de l'effort tranchant $V_b = A - N'_{ay1} = 4150 - 2800 = 1350$ kgf doit être transmise par la zone comprimée du béton. Par conséquent, la résultante N_b est inclinée d'un certain angle par rapport à l'axe longitudinal de la poutre, d'où l'augmentation de l'effort N'_a dans l'armature tendue. La position et les valeurs des efforts A et N'_{ay1} étant connues on peut calculer la position de la résultante V_b. Ensuite, la direction connue de l'effort N'_a et la position de la résultante V_b définissent la direction de l'effort N_b. Après avoir déterminé la direction de l'effort N_b d'après le polygone des forces (fig. 5-105),

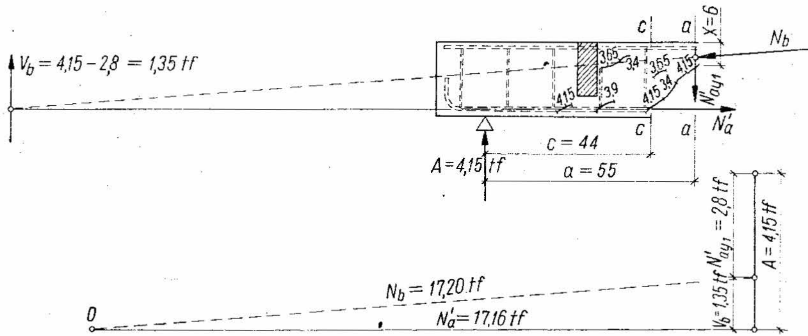


Fig. 5-105. Détermination graphique des efforts N'_a et N_b dans la poutre *K*-185

nous obtenons les valeurs des efforts N_b et N'_a. L'effort de traction ainsi calculé dans les armatures principales dans la section *c—c* est $N'_a \approx 17{,}16$ tf, tandis que l'effort N'_a calculé d'après le moment fléchissant extérieur est beaucoup plus petit, à savoir

$$N'_a = \frac{Ac}{h - \frac{x}{2}} = \frac{4{,}15 \cdot 44}{17{,}5 - \frac{6}{2}} = 13{,}6 \text{ tf} \ll 17{,}16 \text{ tf}.$$

Il résulte de cette analyse qu'après l'ouverture d'une fissure oblique sous la force $P = 4{,}15$ tf, la zone comprimée du béton dans la section *a—a* (fig. 5-105) est soumise non seulement aux contraintes

$$\sigma_x = \frac{N_{bx}}{xb} = \frac{17160}{6 \cdot 15} \approx 130 \text{ kgf/cm}^2,$$

mais également aux contraintes de cisaillement

$$\tau = \frac{V_b}{xb} = \frac{1350}{6 \cdot 15} = 15{,}0 \text{ kgf/cm}^2.$$

Une question se pose : est-ce qu'un tel état de contrainte peut produire une rupture dans cette section ?

Le problème peut être résolu dans une certaine mesure si l'on se base sur les résultats des essais de VIERGIN [85]. Il a examiné les éprouvettes suivant le schéma indiqué sur la fi-

gure 5-106b et il a constaté que la relation linéaire de la résistance du béton au cisaillement pur $\tau_{b'} = \bar{\tau}_b + K_1 \sigma_x$ admise souvent n'était pas valable. Le diagramme de $\tau_{b'}$ obtenu d'après les essais de VIERGIN est une courbe, représentée sur la figure 5-106a. A titre d'approximation analytique des résultats de ses essais VIERGIN a proposé la formule suivante :

$$\tau_{b'} = \bar{\tau}_b + 13{,}9\frac{\bar{\tau}_b}{\sigma_{pr}}\sigma_x - 14{,}9\frac{\bar{\tau}_b}{\sigma_{pr}^2}\sigma_x^2 \tag{5.16}$$

où : $\bar{\tau}_b$ est la résistance du béton au cisaillement pur,

σ_x, la contrainte normale,

σ_{pr}, la résistance du béton sur prisme.

En analysant les contraintes dans la section a—a (fig. 5-105) par la formule (5.16) et en y admettant $\sigma_x = 130$ kgf/cm², $\sigma_{pr} = 140$ kgf/cm² et $\bar{\tau}_b \approx 2\sigma' \approx 31$ kgf/cm² nous calculons que la rupture dans la zone comprimée sous l'action simultanée de σ_x et τ doit avoir lieu pour $\tau_{b'} = 33$ kgf/cm². Cela signifie que la rupture de la section a—a par cisaillement pur n'a pas eu lieu, cette constatation étant d'ailleurs confirmée par les expériences.

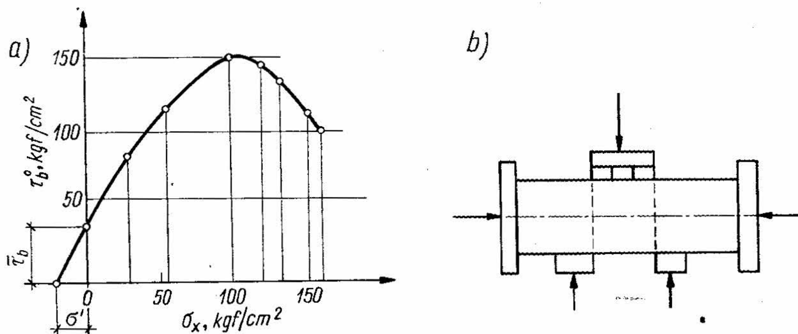


Fig. 5-106. Résultats des essais de VIERGIN [85] : a) diagramme de $\tau_{b'}$, b) schéma de charge des éprouvettes examinées

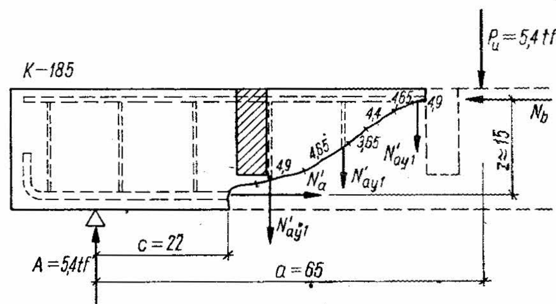


Fig. 5-107. Disposition des efforts dans la zone d'appui séparée par une fissure oblique, poutre K-185

Directement avant la rupture on a observé une fissure oblique secondaire peu inclinée dans la poutre *K*-185 (fig. 5-107), comme dans la poutre *P*-185. Cette fissure était traversée par trois étriers doubles de Ø 8 mm, qui pouvaient transmettre l'effort tranchant total. Par conséquent, on peut supposer que l'effort N_b est parallèle à N'_a, et ainsi, de l'équilibre de la partie de la poutre voisine de l'appui (fig. 5-107), nous trouvons que

$$N'_a = \frac{5,4}{15,0}(65-22) = 15,4 \text{ tf.}$$

Cependant, par un calcul de l'effort dans l'acier d'après le moment extérieur, nous obtiendrons

$$N'_a = A\frac{c}{2} = 5,4\frac{22}{15,0} = 7,9\text{tf} \ll 15,4 \text{ tf.}$$

Poutre I-185

Il est caractéristique pour ce type de poutres que les fissures verticales dues à la flexion et les fissures obliques de cisaillement s'ouvrent simultanément (fig. 5-108). Près du point d'application de la force *P* et sur le segment où l'effort tranchant et le moment fléchissant interviennent simultanément et d'une façon importante, une très longue fissure s'est manifestée sous la charge $P_f = 1,4$ tf. Cette fissure a traversé la membrure inférieure, comme une fissure typique due à la flexion, pour devenir une fissure oblique caractéristique du cisaillement, l'âme ayant une largeur trois fois plus petite que celle de la membrure inférieure. A cause des contraintes de cisaillement considérables dans l'âme $\left(\tau \approx \frac{1400-0,5\cdot 250}{5\cdot 0,85\cdot 17,5} = 17 \text{ kgf/cm}^2\right)$, la fissure a traversé l'axe neutre des contraintes σ_x et est entrée dans la zone comprimée.

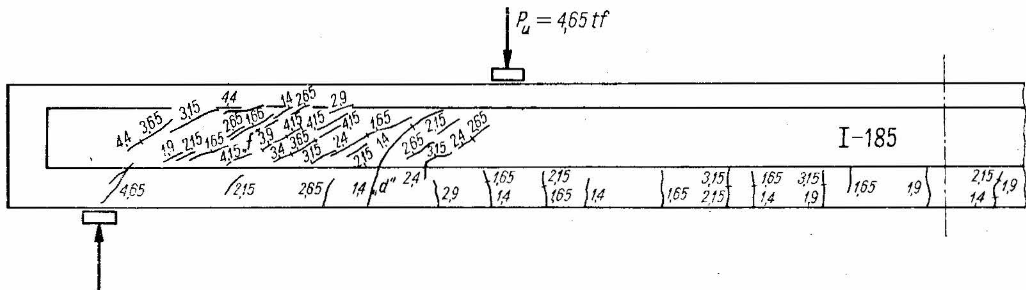


Fig. 5-108. Fissuration de la poutre *I*-185 sous la charge $P_u = 4,65$ tf

Dans la poutre avec prismes on n'a pas observé de fissuration de ce type sous une force aussi petite *P*. L'expérience ne confirme donc pas de considérer dans les calculs la largeur d'une poutre-maîtresse égale à la distance au nu des faces frontales des poutres préfabriquées.

L'observation de la suite de la fissuration de la poutre *I*-185 permet de constater qu'une fissure *f* s'est manifestée dans la zone où le moment fléchissant disparaît. Cette fissure

n'est pas ouverte à partir de la face tendue inférieure, mais elle est située dans la zone de l'axe neutre, déterminée dans la première phase de la mise en charge de la poutre.

Une analyse des contraintes du béton dans les zones *D* et *F*, situées dans l'axe neutre des contraintes σ_x, est indiquée sur la figure 5-109. L'état limite de contrainte dans la zone *D*, où la fissure *d* est inclinée à 45°, est représenté par le cercle K_3, tandis que le cercle K_4 correspond à l'état de contrainte dans la zone *F* (fissure *f*). Les deux états de contrainte ont été calculés sans tenir compte de l'influence des étriers.

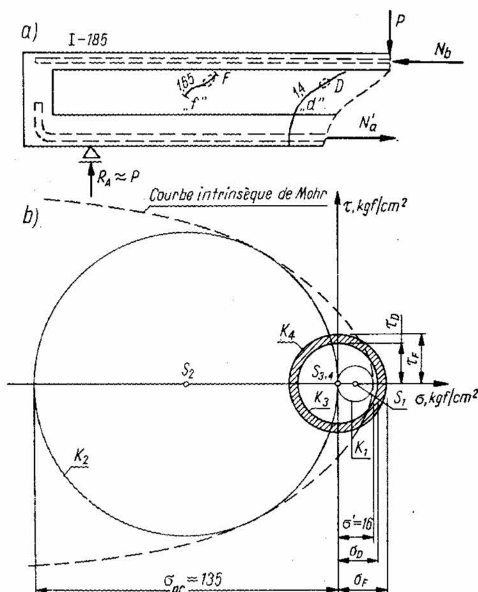


Fig. 5-109. Zone d'appui de la poutre *I*-185 : a) fissuration, b) analyse des contraintes du béton dans le zones *F* et *D* par le critère de Mohr

L'analyse des contraintes effectuée sur la figure 5-109 confirme encore une fois la validité de la proposition de l'auteur concernant la nécessité de remplacer la courbe limite de Mohr par une zone limite, cette question ayant été précédemment discutée au paragraphe 2.3.7.

Poutre P-300

Malgré une résistance du béton supérieure de plus de 60 % dans les poutres de la série *II* par rapport à la série *I*, les fissures dues à la flexion et au cisaillement se sont ouvertes sous des charges à peu près du même ordre de grandeur, et même un peu plus tôt. Cela peut être expliqué par des contraintes supérieures dues au retrait, vu un dosage plus élevé en ciment. Un pourcentage plus élevé de l'armature longitudinale a produit incontestablement aussi une augmentation des contraintes de retrait. La rupture de la poutre a eu lieu sous la force $P_u = 7{,}83$ tf (fig. 5-110), donc avec une augmentation de la capacité portante de 40 % environ par rapport à la poutre *P*-185. L'opinion de B. Bukowski [15] concernant

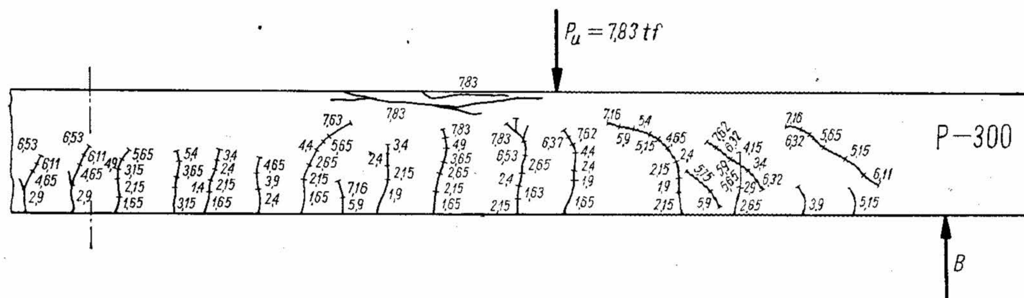


Fig. 5-110. Fissuration de la poutre *P*-300 sous la charge $P_u = 7{,}83$ tf

l'influence négative du retrait sur la fissuration sans effets négatifs sur la capacité portante se trouve donc confirmée. La rupture a été produite directement par l'écrasement du béton dans la zone comprimée située entre les forces de la charge extérieure. Les fissures obliques dues au cisaillement sont entrées très profondément dans la zone comprimée, et on pouvait prévoir que, s'il n'y avait pas eu de rupture prématurée due à la flexion, ces fissures auraient été la cause directe de l'épuisement de la capacité portante sous une faible augmentation de la charge.

Poutre K-300

Nous constatons ici, en comparaison avec la poutre rectangulaire *P*-300, la fissuration sous une charge plus forte $P_f = 1{,}9$ tf et une capacité portante légèrement supérieure $P_u = 7{,}9$ tf (fig. 5-111). Dans la série *I* ces relations étaient inverses : P_u de la poutre *K*-185 était inférieure à P_u de la poutre *P*-185. En tenant compte du fait que la résistance du béton des prismes introduits dans les poutres était supérieure ($\sigma^0_{cyl} = 220$ kgf/cm^2) à la résistance du béton des poutres faisant partie de la série *I* et qu'elle était inférieure à la résistance du béton dans la série *II*, on aurait pu prévoir un effet contraire. On ne peut pas dire, évidemment, que l'introduction des prismes en béton de résistance plus faible a causé un accroissement de la capacité portante de la poutre *K*-300, car cette augmentation de 1 % à peine était sans aucun doute aléatoire. Il est possible, tout au plus, de constater que pour les bétons de résistance élevée de l'ordre de 300 kgf/cm^2 l'introduction des abouts des nervures préfabriquées ne provoque pas de diminution nette de la capacité portante au cisaillement de la poutre-maîtresse.

Poutre I-300

Contrairement à la poutre en double T *I*-185, on n'observe pas de diminution de la capacité portante par rapport à celle d'une poutre pleine. On voit d'après la figure 5-112 que les fissures obliques dans l'état de rupture n'entrent pas plus profondément dans la zone comprimée que dans le cas, par exemple, d'une poutre rectangulaire. Il est vrai que les fissures sont plus nombreuses, mais elles sont réparties dans l'âme. L'ouverture des fissures obliques n'était pas supérieure à celle produite dans les poutres *P*-300 et *K*-300. Il est à remarquer que les contraintes de cisaillement dans l'âme au moment de la rupture étaient

$$\tau_n = \frac{8070}{5 \cdot 0{,}85 \cdot 17{,}5} \approx 108 \text{ kgf/cm}^2\,;$$

elles étaient donc 5 fois plus grandes que la valeur admissible dans le règlement PN/B-03260 pour les contraintes principales de traction, égales à 22,5 kgf/cm^2 pour le cas de $\sigma^0_{cyl} = 300$ kgf/cm^2.

C. Conclusions et recommandations pour le dimensionnement

Dans le tableau 5-14 on a rassemblé quelques-uns des résultats les plus importants des essais. Les contraintes de cisaillement constatées au moment de l'ouverture d'une

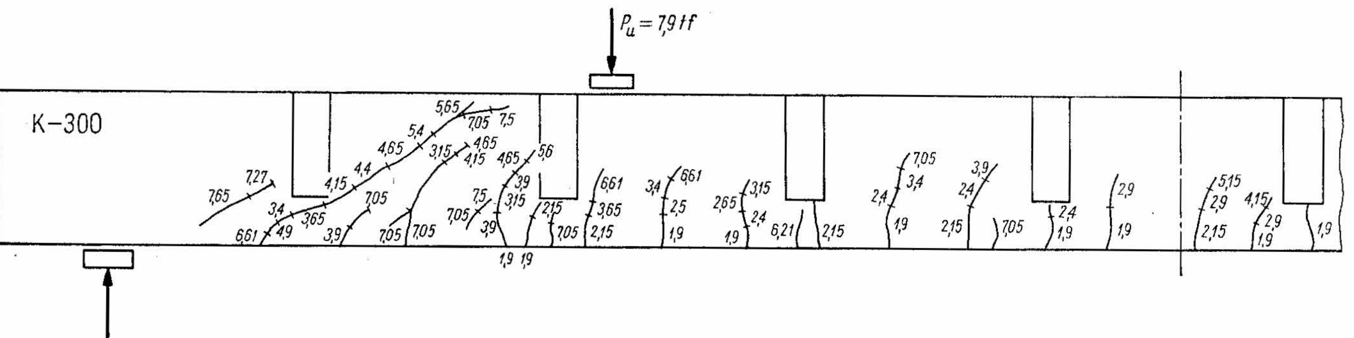


Fig. 5-111. Fissuration de la poutre *K*-300 sous la charge $P_u = 7{,}9$ tf

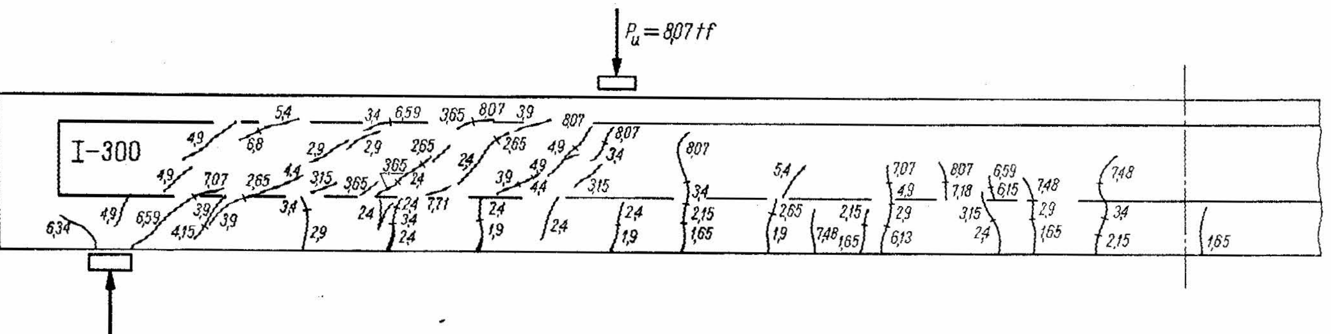


Fig. 5-112. Fissuration de la poutre *I*-300 sous la charge $P_u = 8{,}07$ tf

TABLEAU 5-14

Série	Poutre	σ^{0}_{cyl} kgf/cm²	σ' kgf/cm²	A'_a %	P_f kgf	P_{rf1} kgf	$P_u = T_u$ kgf	T_{fu1} kgf/cm²	τ_n kgf/cm²	$\frac{\tau_{fu1}}{R'}$	$\frac{\tau_n}{R'}$
	P-185				1780	2650	5650	11,9	25,3	0,73	1,56
I	*K*-185	185	16,3	2,93	1900	2400	5400	10,8	24,2	0,66	1,49
	I-185				1400	1400	4650	18,8	62,5	1,15	3,83
	P-300				1650	3650	7830	16,4	35,3	0,73	1,57
II	*K*-300	300	22,5	3,86	1900	3150	7900	14,2	35,3	0,64	1,57
	I-300				1650	2400	8070	32,2	108	1,45	4,80

première fissure oblique et au moment de la rupture sont indiquées dans les colonnes 9 et 10 respectivement ; elles ont été calculées d'après la formule

$$\tau = \frac{T}{b \cdot 0{,}85h}.$$

Comme il résulte de la colonne 11, la condition imposée par le règlement $\tau \leqslant \sigma'$ n'exclut pas toujours la possibilité d'une ouverture des fissures obliques. Cela concerne surtout les poutres rectangulaires, pour lesquelles le rapport $\frac{\tau_{fu1}}{\sigma'}$ est dans les quatre cas plus petit que 1,0, aussi bien pour les poutres avec des prismes préfabriqués que pour les poutres homogènes. Autrement se présente la question pour les poutres en forme de double T. Dans les poutres des deux séries les fissures obliques se sont ouvertes sous des contraintes supérieures à σ' et l'épuisement de la capacité portante a eu lieu sous des contraintes de cisaillement 4 ou 5 fois supérieures aux valeurs limites $\tau^{1}_{0max} = \sigma'$ admissibles indiquées par le règlement PN/B-03260.
En conséquence, la détermination réglementaire d'une section minimale selon l'inégalité

$$\tau^{1}_{0max} \leqslant \sigma'$$

doit être modifiée dans certains cas.

En ce qui concerne le dimensionnement au cisaillement des poutres-maîtresses avec introduction des abouts de nervures préfabriquées, l'auteur propose de conserver pour le moment la méthode classique basée sur la valeur des contraintes de cisaillement ; mais la valeur de τ peut être calculée par la formule suivante

$$\tau = \frac{T}{\eta_0 b \cdot 0{,}85h}.$$

Le produit $\eta_0 b$ est une largeur fictive ; le coefficient $\eta_0 \leqslant 1$ dépend de la qualité du béton de la poutre, et ses valeurs peuvent être déterminées d'après le diagramme de la figure 5-113. Les coefficients η_0 déduits des relations entre les capacités portantes des poutres avec des prismes préfabriqués et des poutres homogènes ont été déterminés pour les bétons de faible résistance par les courbes d'extrapolation. Nous obtenons ainsi des valeurs de η_0 beaucoup plus petites pour les bétons faibles. Dans l'opinion de l'auteur cela est justifié,

car les bétons faibles ont une résistance très basse à l'ouverture des fissures obliques et à la rupture par cisaillement ; ces relations ont été constatées d'après les essais de DAfE décrits précédemment. On peut chercher les explications de ces phénomènes dans le fait que les composantes horizontales des efforts dans les bielles comprimées d'un treillis de MÖRSCH ont seulement pour effet qu'une partie de l'effort tranchant T, indépendamment du volume et de la nature de l'armature transversale, soit transmise par la zone comprimée du béton. Etant donné que l'augmentation de E_b est liée à un accroissement de σ^0_{cyl}, la participation de la zone comprimée dans la transmission de l'effort tranchant T augmente avec l'accroissement de σ^0_{cyl}.

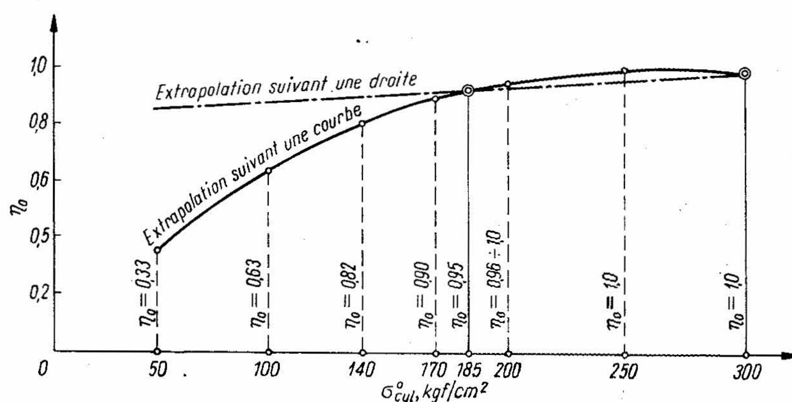


Fig. 5-113. Coefficients η_0 pour déterminer la largeur de calcul d'une poutre-maîtresse avec les extrémités des nervures préfabriquées, incorporées dans le béton frais

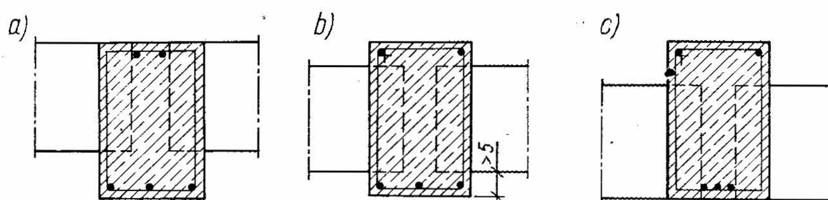


Fig. 5-114. Trois modes de disposition des nervures préfabriquées incorporées dans une poutre-maîtresse en béton frais

En outre, la diminution du coefficient η_0 pour les bétons faibles peut être expliquée par le fait que les abouts préfabriqués et introduits dans une poutre peuvent subir une rotation due à la flexion du plancher. Dans les cas des bétons faibles des flèches considérables peuvent se produire, surtout en tenant compte des effets rhéologiques.

Les recommandations présentées ci-dessus pour le calcul concernent les poutres-maîtresses à une travée dans lesquelles les nervures préfabriquées d'un plancher à poutres multiples sont introduites comme la figure 5-114 a et b l'indique. Quand les nervures sont

situées directement au niveau des faces inférieures des poutres (fig. 5-114c) il faut prévoir non seulement l'armature ordinaire de cisaillement mais aussi l'armature d'ancrage des abouts préfabriqués dans la zone comprimée de la poutre. Le même ancrage est obligatoire dans le cas où des forces considérables concentrées sont transmises de la nervure préfabriquée à la poutre-maîtresse, par exemple le poids d'une cloison située sur une ou deux poutres préfabriquées voisines. L'armature d'ancrage, indispensable dans le cas indiqué par la figure 5-114c ou en cas de transmission d'efforts considérables concentrés, doit être calculée de façon qu'en respectant les contraintes admissibles dans l'acier elle puisse résister à l'effort tranchant total transmis par les nervures préfabriquées à la poutre.

6. DISCUSSION, CONCLUSIONS ET DIRECTIVES

6.1. OBSERVATIONS GÉNÉRALES

Les résultats présentés dans le chapitre 5 concernent les études expérimentales les plus importantes dans le domaine du cisaillement, réalisées depuis 50 ans. Il était impossible de présenter sous une forme succincte toutes les recherches, non seulement parce que le nombre des éléments étudiés se compte actuellement par milliers, mais aussi parce que dans la majorité des cas les résultats ne sont absolument pas comparables et mènent à des conclusions divergentes.

Comme on l'a mentionné au début de cet ouvrage, la cause de la divergence dans les résultats obtenus tient au fait que les différents chercheurs en face du grand nombre de paramètres influant sur les états limites de flexion, de fissuration et de rupture ont essayé de les éliminer de façon différente ; le plus souvent l'influence très importante de l'échelle a été négligée (voir sous-chapitre 5.2).

Pour mieux comprendre l'importance des différences entre les opinions présentées par les divers chercheurs il suffit de regarder la figure 6-1, où l'on a montré la relation entre l'élancement de cisaillement et la valeur réduite du moment de rupture par cisaillement d'après huit chercheurs américains. Nous voyons que pour une résistance du béton constante ($\sigma^0_{cyl} = 150$ kgf/cm^2) et pour un pourcentage de l'armature principale constant ($\varpi = 2{,}0$ %), $Q'_a = 3500$ kgf/cm^2, $E_a = 2{,}1 \cdot 10^6$ kgf/cm^2, cinq chercheurs, à savoir MORETTO, CLARK, WHITNEY, BRESLER et PISTER, ont trouvé des accroissements m_{cu} différents, proportionnels à l'augmentation de l'élancement de cisaillement $\frac{a}{h}$, et trois autres, JONES, LAUPA et MOODY, ont constaté que la valeur m_{cu} ne dépendait pas de l'élancement de cisaillement.

Or, en réalité, l'opinion d'aucun de ces chercheurs n'est entièrement valable. Cette constatation est basée sur les résultats des travaux plus récents de MORROW-VIEST [61] et de LEONHARDT-WALTHER [51], ces résultats étant présentés par les diagrammes de la figure 5-76.

Les divergences indiquées sur la figure 6-1 peuvent être expliquées par le fait qu'il n'est pas juste de faire dépendre la capacité portante, relativement au cisaillement, seulement du rapport $\frac{a}{h}$, même quand $\sigma^0{}_{yl}$ et ϖ sont maintenus constants. Les facteurs supplé-

mentaires qui ont produit dans une grande mesure la dispersion des courbes de la figure 6-1 sont les suivants : la valeur de l'adhérence de l'acier au béton, la méthode de mise en charge, l'ancrage des armatures au-dessus de l'appui et les dimensions absolues des éléments en béton armé examinés. Les chercheurs américains mentionnés ont trouvé également des résultats divergents en déterminant l'influence de l'armature principale sur la valeur du moment réduit de cisaillement, ce qui est représenté par la figure 6-2. Il est encore à remarquer que les différences si importantes entre les courbes des figures 6-1 et 6-2 ont été trouvées d'après des essais sur des poutres simplement appuyées, de section rectangulaire et sans armature transversale. Si l'on tient compte des poutres en T et des poutres

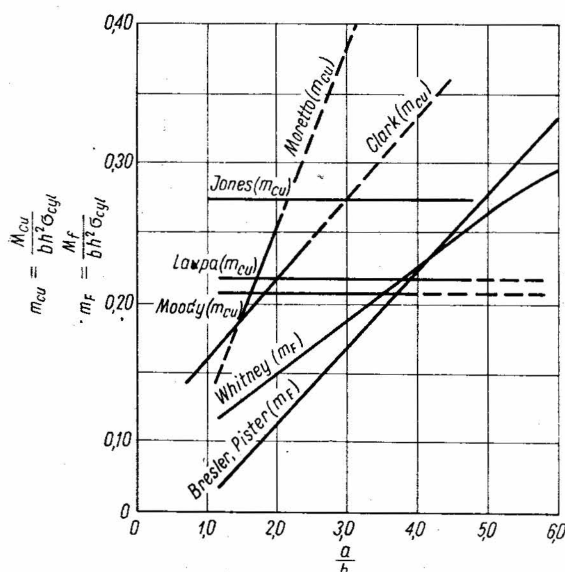


Fig. 6-1. Influence de l'élancement de cisaillement sur la valeur du moment réduit de rupture [33]

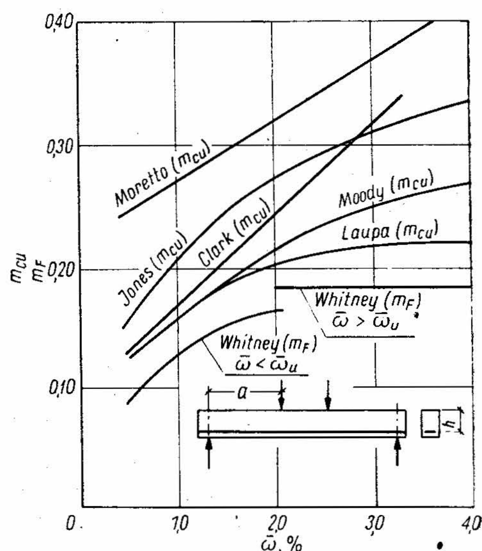


Fig. 6-2. Influence de la section relative de l'armature longitudinale sur les valeurs m_{cu} et m_F avec élancement de cisaillement $a/h = 2,5$ [33] ; $\bar{\omega}_u$, pourcentage limite d'armature principale

hyperstatiques, on obtient des relations encore moins nettes. D'après cette analyse, on peut dire en résumé que les difficultés rencontrées ici sont évidentes et normales lorsqu'on dépouille de nombreuses données expérimentales pour en tirer des conclusions générales.

La figure 6-3 représente les diagrammes de l'influence de la résistance du béton sur les moments réduits de cisaillement (m_{cu}) et de fissuration (m_F) selon les divers chercheurs. Nous y voyons également une dispersion très grande des courbes, malgré le fait qu'elles ont toutes été déduites d'études expérimentales.

Dans cette situation, même avec une grande prudence dans les conclusions et constatations, il n'est pas possible d'éviter des formulations subjectives et non entièrement con-

firmées par les résultats d'essais ultérieurs. Or, après une période de 50 ans de développement de la théorie du béton armé, il est bien entendu que le problème du cisaillement ne peut pas être complètement expliqué par des essais effectués une fois, même par les essais les

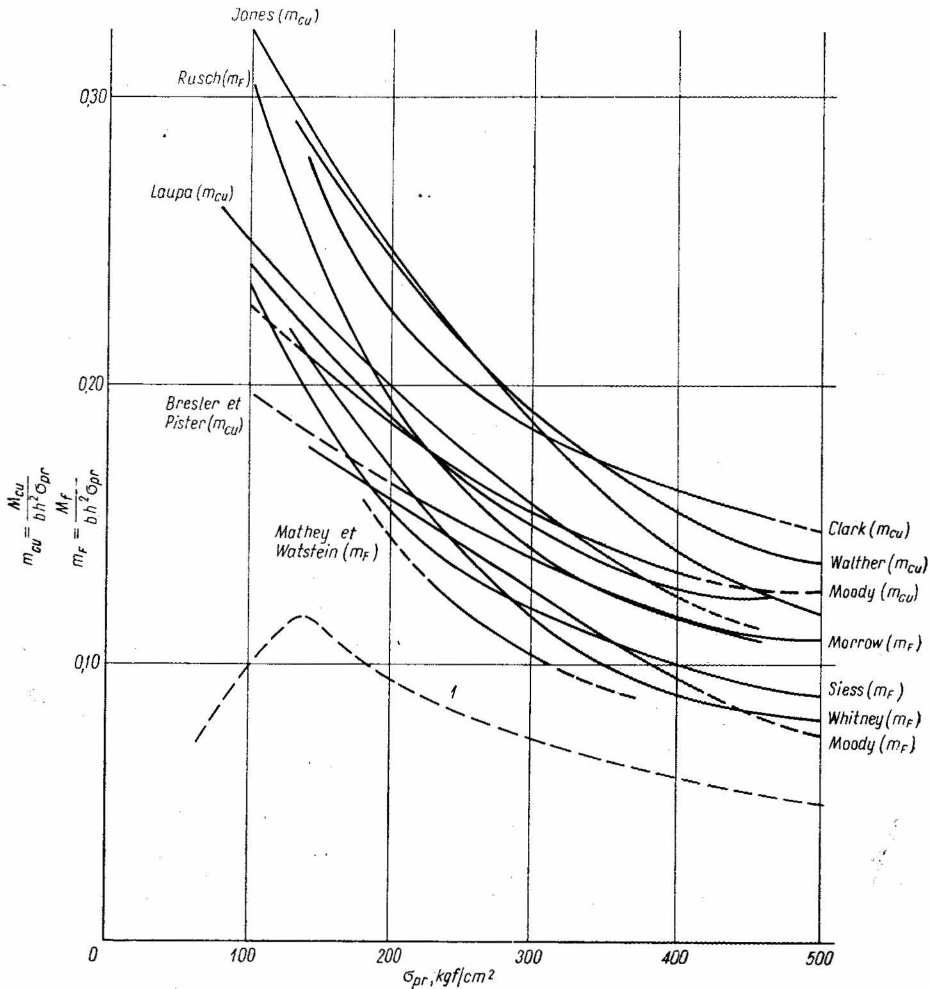


Fig. 6-3. Influence de la résistance du béton σ_{pr} sur les valeurs des moments réduits de fissuration m_F et de rupture m_{cu}

1 — moment réduit admissible calculé pour $\tau = \tau^1_{0max}$

plus complets de tous ceux qui ont été réalisés jusqu'à maintenant. Les études théoriques, qui dans les problèmes du cisaillement doivent être basées sur les données expérimentales, ne conduisent pas non plus à une solution définitive.

6.2. EMPLOI DES CRITÈRES DE RÉSISTANCE DANS LA THÉORIE DU CISAILLEMENT

Dans le chapitre 2 on a présenté les critères de résistance les plus importants afin de les utiliser pour l'analyse de l'état de contrainte du béton dans la zone de cisaillement des poutres en béton armé et béton précontraint. Pour résumer ces considérations théoriques et pour analyser les résultats des études expérimentales (voir ci-dessous) on peut constater que des divergences considérables se manifestent en ce qui concerne les relations entre les contraintes principales et les valeurs constantes de la résistance uni-dimensionnelle du béton.

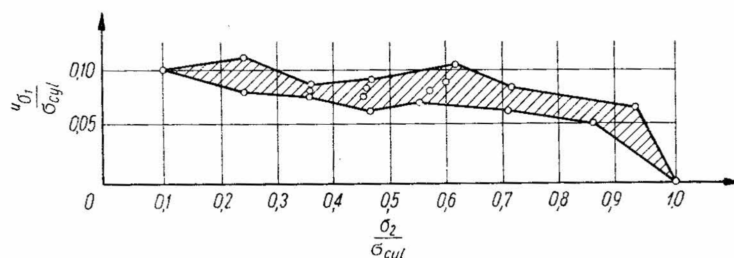


Fig. 6-4. Résistance du béton dans un état plan de contrainte ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$) d'après les essais de BRESLER et PISTER

La figure 6-4 indique les résultats des essais de BRESLER et PISTER [13] effectués sur des tuyaux en béton de 20,8 cm de diamètre extérieur, de 15,2 cm de diamètre intérieur et de 76 cm de longueur. Ces tuyaux en béton de $\sigma_{cyl} = 180$ kgf/cm^2 ont été soumis à une compression et une torsion simultanées, d'où les rapports $\sigma_1 : \sigma_2$ différents. Le béton dans ces essais était caractérisé par une résistance uni-axiale égale à 180 kgf/cm^2. Ces essais montrent que l'influence des contraintes de compression σ_2 sur les contraintes de traction ${}^u\sigma_1$, correspondant à la rupture de la structure du béton, est d'abord insignifiante (pour les petites valeurs de σ_2) mais évidente et qu'elle augmente rapidement pour $\sigma_2 > 0{,}8\ \sigma_{cyl}$. Ceci est en contradiction avec les résultats des essais de MÖRSCH (paragraphe 2.3.2), lequel, pour les contraintes $\sigma_2 < 0{,}3\ \sigma_{cyl}$, n'a pas constaté d'influence négative des contraintes de compression σ_2 sur les valeurs des contraintes limites de traction ${}^u\sigma_1$. Ces dernières satisfont à l'équation

$$ {}^u\sigma_1 = C^{te} = \sigma' $$

où ${}^u\sigma_1$ est la contrainte principale de traction, correspondant à la rupture de structure du béton.

Une influence négative encore plus importante des valeurs faibles de la contrainte σ_2 sur les valeurs limites de ${}^u\sigma_1$ peut être observée dans les essais de MCHENRY et KARNI [56], effectués sur des tuyaux en béton de 35,6 cm de diamètre extérieur, de 25,4 cm de diamètre intérieur et de 61 cm de longueur. Les tyuaux ont été soumis à une pression intérieure

produisant des contraintes circulaires de traction σ_1. De plus, les tuyaux ont été comprimés suivant l'axe longitudinal (contraintes σ_2). Les résultats de ces essais concernant les bétons de résistance uni-axiale variable et égale à 215, 350 et 460 kgf/cm^2 sont indiqués sur la figure 6-5.

Des résultats très-proches de ceux de BRESLER et PISTER ont été obtenus également par VIERGIN (fig. 2-4). Néanmoins, les divergences dans les résultats obtenus par divers chercheurs étaient considérables. Cela s'explique non seulement par les résistances et dosages différents des bétons, mais également par le fait que dans tous les essais en question l'état bi-axial de contrainte a été produit différemment. Il semble qu'un état de contrainte suffisamment homogène peut être obtenu dans un tuyau en béton soumis simultanément à la torsion et à la compression suivant l'axe longitudinal, mais l'épaisseur du tuyau doit être plutôt petite par rapport à son diamètre, de l'ordre de 1/10 à 1/15.

La figure 6-6 montre les résultats des essais de VIERGIN, BRESLER et PISTER, MCHENRY et KARNI, et MÖRSCH, représentés dans le système de coordonnées σ_1, σ_2. Pour faciliter l'analyse, tous les résultats ont été ramenés à des valeurs sans dimensions en les rapportant à la résistance σ_{pr}. De plus, on a indiqué les courbes limites déduites du critère de MOHR sous la forme d'une droite et d'une parabole.

Dans le sous-chapitre 2.2 l'auteur a donné une analyse de l'utilité du critère de MOHR pour l'estimation de la résistance du béton dans l'état bi-axial de contrainte en se fondant sur des résultats expérimentaux et sur les critères de résistance les plus importants. Il en résulte

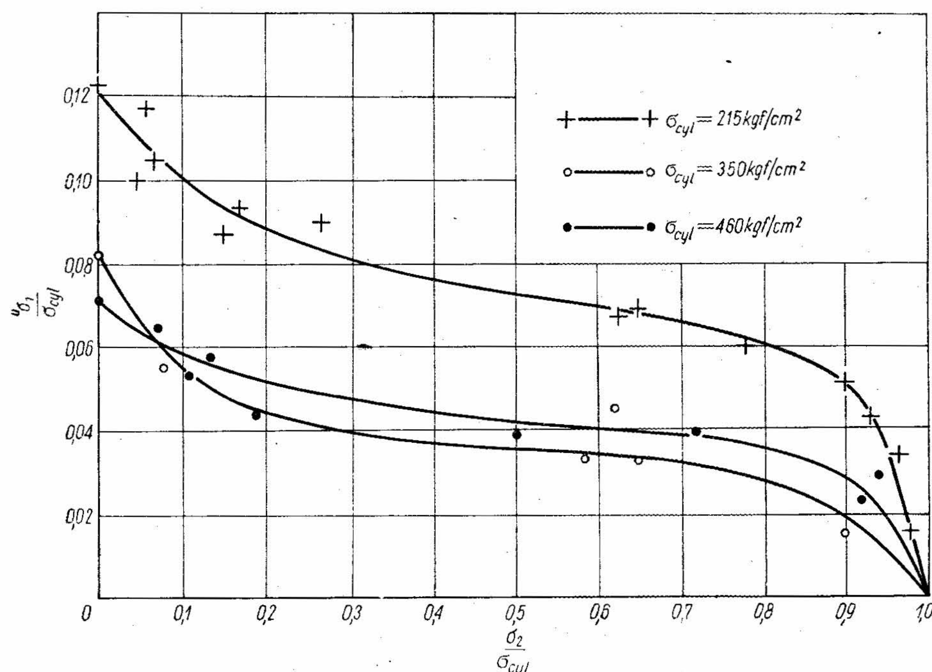


Fig. 6-5. Résistance du béton dans un état plan de contrainte ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$) d'après les essais de MCHENRY et KARNI

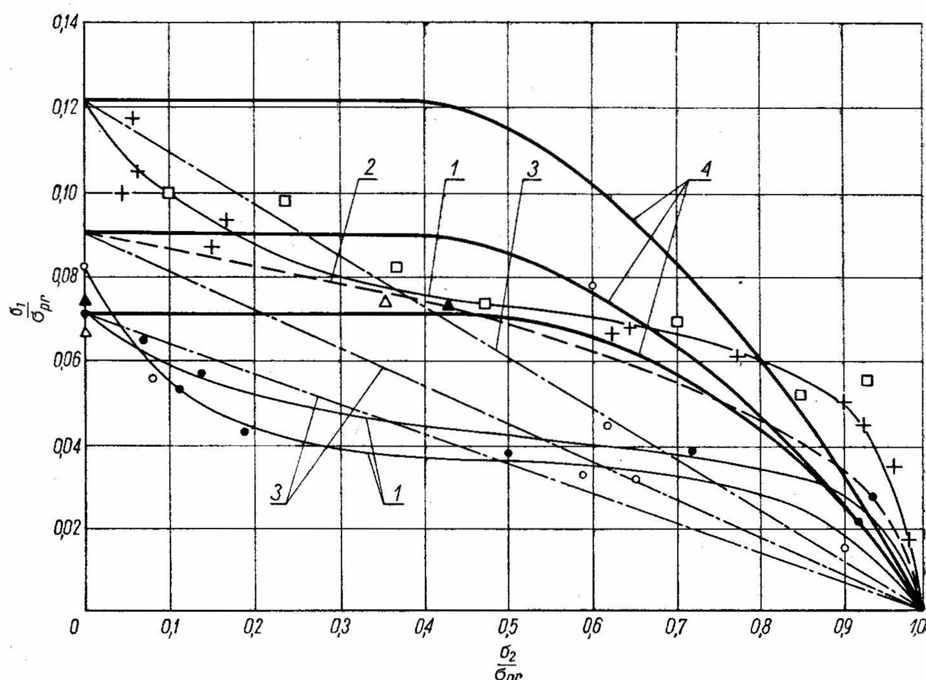


Fig. 6-6. Critère de résistance de MOHR comparé avec les résultats expérimentaux

1 — courbes intrinsèques des essais de McHENRY *et* KARNI, *2 — courbe intrinsèque des essais de* VIERGIN, *3 — ligne intrinsèque de* MOHR *qui a l'équation d'une droite, 4 — courbe intrinsèque de* MOHR *qui a l'équation d'une parabole, Résultats des essais de:*

+ McHENRY et KARNI $\sigma_{cyl} = 215$ kgf/cm², $\sigma'/\sigma_{pr} = 0,122$
○ McHENRY et KARNI $\sigma_{cyl} = 315$ kgf/cm², $\sigma'/\sigma_{pr} = 0,083$
● McHENRY et KARNI $\sigma_{cyl} = 460$ kgf/cm², $\sigma'/\sigma_{pr} = 0,07$
□ BRESLER-PISTER $\sigma_{cyl} = 180$ kgf/cm², $\sigma'/\sigma_{pr} = 0,12$
▲ MÖRSCH $\sigma_{cyl} = 321$ kgf/cm², $\sigma'/\sigma_{pr} = 0,075$
△ MÖRSCH $\sigma_{cyl} = 317$ kgf/cm², $\sigma'/\sigma_{pr} = 0,068$

qu'on peut admettre que dans un état de compression bi-axiale le critère de FILONIENKO-BORODITCH, basé sur la relation fonctionnelle $F(J_1, J_2, J_3) = 0$, donne, pour un béton soumis à l'état de contrainte plan, des résultats plus proches des données expérimentales que le critère de MOHR.

Cependant, en ce qui concerne la zone de cisaillement, où une des contraintes principales correspond à la compression et l'autre à la traction, les deux critères donnent des résultats presque identiques. D'où on peut tirer la conclusion que dans les problèmes de cisaillement on n'a pas besoin de faire appel à la théorie plus compliquée de GIENIYEV-KISYUK, car pour la pratique la précision du critère beaucoup plus simple de MOHR est suffisante. Il n'y a donc qu'à décider laquelle des courbes de MOHR, la droite ou la parabole, s'accorde le mieux avec les résultats expérimentaux.

D'après la figure 6-6 nous voyons que les courbes résultant des essais de McHENRY et KARNI ont un caractère semblable, aussi bien pour les bétons plus faibles, avec $\sigma'/\sigma_{pr} = 0,122$, que pour les bétons forts, avec $\sigma'/\sigma_{pr} = 0,083$ et 0,070. Une chute brusque de la résistance à la traction est déjà observée au début de l'augmentation des contraintes de compression σ_2. Une chute un peu moins accentuée de σ_1 pour les valeurs faibles de σ_2

est visible également dans les résultats de BRESLER et PISTER ainsi que dans ceux de VIERGIN.

En comparant les résultats expérimentaux avec ceux qu'on a obtenus analytiquement à partir du critère de MOHR nous voyons que la courbe intrinsèque, correspondant à l'équation de la parabole, donne des valeurs trop élevées jusqu'à une valeur du rapport $\sigma_2/\sigma_{pr} = 0{,}8$. Par contre, la courbe intrinsèque sous la forme d'une droite donne des valeurs trop faibles à partir de $\sigma_2/\sigma_{pr} = 0{,}4$. Seulement les essais de MÖRSCH, concernant les bétons de forte résistance, semblent justifier la courbe intrinsèque en forme de parabole pour tout le domaine $0 < \sigma_2/\sigma_{pr} < 1$.

Le manque d'un nombre plus élevé d'essais ne permet pas actuellement de juger définitivement quelle est la forme la plus adéquate d'une courbe intrinsèque pour la théorie du cisaillement. En se basant sur la figure 6-6 il est possible néanmoins d'avancer que la courbe intrinsèque de MOHR supposée sous fa forme d'une droite permet non seulement de simplifier le problème mais également, pour le rapport $\sigma_2/\sigma_{pr} < 0{,}5$, d'obtenir dans la plupart des cas des résultats plus conformes à la réalité qu'une parabole. De plus, les résultats obtenus se situent du côté de la sécurité dans tout le domaine $0 < \sigma_2/\sigma_{pr} < 1$.

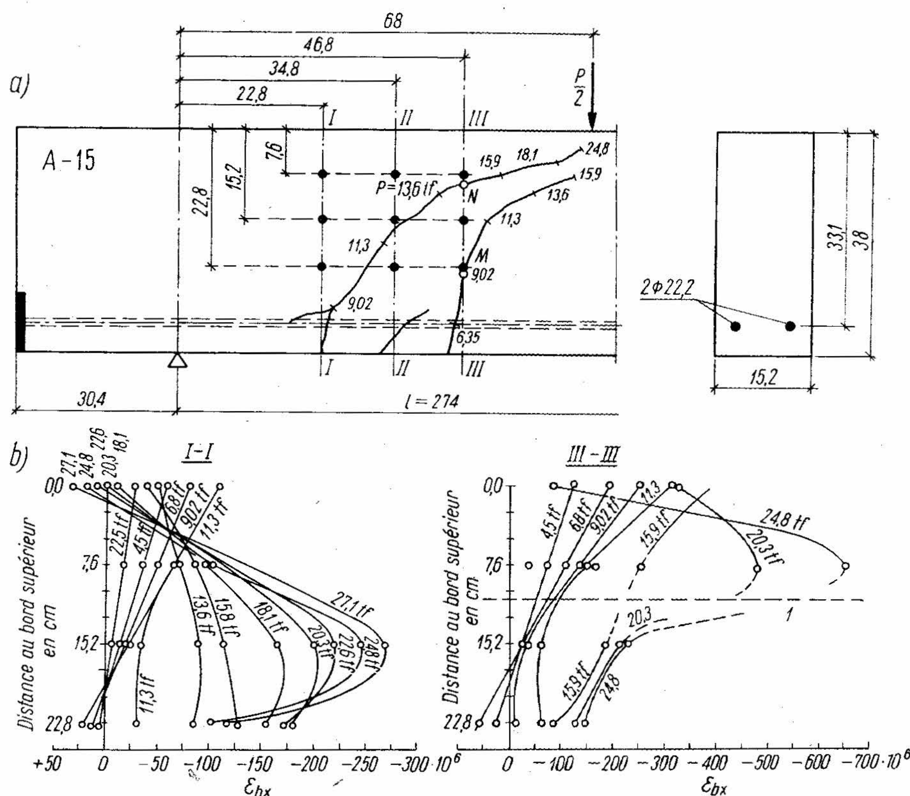


Fig. 6-7. Résultats des essais de WATSTEIN et MATHEY: a) fissuration de la poutre *A*-15, b) déformations unitaires du béton dans les sections *I-I* et *III-III*

1 — niveau où la section III—III est coupée par la fissure oblique supérieure

Les changements continus d'état de contrainte dans la zone comprimée du béton empêchent de trouver une concordance satisfaisante entre les résultats théoriques obtenus à l'aide des critères de résistance et les données trouvées d'après les essais des poutres en béton armé. Ces changements des contraintes sont produits par une variation de M et T dans une section donnée et aussi par la position variable de l'axe neutre. La hauteur de la zone comprimée du béton dépend principalement de la fissuration de la poutre, ce qui est impossible à déterminer analytiquement. La figure 6-7b indique les résultats des mesures des déformations unitaires du béton ε_{bx} de la poutre A-15 dans les essais de WATSTEIN-MATHEY [82]. Il résulte de ce diagramme qu'après l'ouverture d'une fissure oblique, à mesure qu'augmente la charge l'axe des contraintes σ_x nulles se déplace vers l'armature tendue, donc dans la direction opposée à celle que les théories des états limites admettent le plus souvent. En exploitant ces mesures, TAUB [78] a publié pour la section *III—III* (fig. 6-7a) un diagramme des contraintes σ_x (fig. 6-8), d'où il découle que pour un certain état de charge nous avons deux axes des contraintes σ_x nulles dans cette section. On peut soupçonner que ce diagramme ne correspond pas entièrement à la réalité, surtout en ce qui concerne les valeurs nulles des contraintes σ_x au point N, mais on ne peut pas contester les résultats des mesures de WATSTEIN-MATHEY.

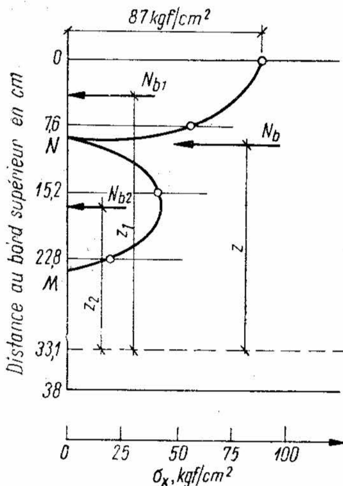


Fig. 6-8. Diagramme des contraintes σ_x d'après TAUB dans la section *III—III* de la poutre examinée par WATSTEIN et MATHEY (poutre A-15, fig. 6-7)

Un phénomène analogue a été constaté dans les essais de RUSCH-HAUGLI-MAYER [33] effectués sur des poutres munies d'étriers verticaux.

Cette discussion sur les critères de résistance et la position de l'axe des contraintes σ_x nulles peut provoquer des réserves justifiées relativement aux théories d'état limite de la zone comprimée de la poutre en béton armé, théories actuellement appréciées. Dans ces théories on admet que la position de l'axe des contraintes σ_x nulles peut être calculée de la même façon que pour la zone du cisaillement pur. D'autre part, il est bien entendu que l'analyse de la résistance de la zone de cisaillement par les critères de résistance peut être utilisée dans les cas d'expertises où la disposition des fissures est connue.

6.3. SCHÉMA DU TREILLIS CLASSIQUE DE MÖRSCH

La théorie classique du cisaillement formulée par MÖRSCH a été largement présentée au chapitre 3. A la base de cette théorie il y a un schéma simplifié des efforts dans une poutre en béton armé dans la phase *II* ; ce schéma est déduit de ce qu'on appelle l' « analogie du treillis classique ». On suppose que les efforts produits par les contraintes principales de traction sont transmis par les barres relevées et par les étriers qui jouent le rôle des croisillons

et des poteaux tendus. Les contraintes inclinées de compression sont transmises par des bielles en béton, séparées par des fissures obliques, qui constituent les croisillons comprimés dans ce schéma du treillis (fig. 3-9 et 3-10).

Les études dans le domaine du cisaillement effectuées dans la dernière vingtaine d'années dans de nombreux centres de recherches en Europe, aux Etats-Unis et au Japon ont prouvé que le calcul basé sur la théorie classique de MÖRSCH conduit souvent à des sections surdimensionnées, en béton et en acier. Les premières informations sur les possibilités de diminuer les sections du béton et de l'armature par rapport à la méthode classique datent déjà de 1926. Les essais de SLATTER, LORD et ZIPPRODT effectués à cette époque ont été présentés au paragraphe 5.3.2. D'abord, ces essais n'ont pas éveillé un intérêt particulier, probablement à cause du fait que les conclusions étaient formulées d'après des essais effectués sur des poutres non habituelles, courtes et fortement armées et adaptées aux besoins des constructions navales (fig. 5-43).

Une nouvelle phase d'études intensives dans le domaine du cisaillement a été commencée par BORICHANSKI [11] et MORETTO [61].

Les recherches de grande envergure et très précises de LEONHARDT et WALTHER [51] [52] [53] [54], effectuées à l'Institut de O. GRAF à Stuttgart, méritent une attention particulière. Ces auteurs, sur la base d'une analyse des résultats expérimentaux des poutres en béton armé de dimensions, conditions aux appuis, charge et pourcentage de l'armature différents ont constaté que, dans une poutre fissurée en béton armé, il était en principe difficile de trouver une analogie avec un treillis isostatique. Dans l'opinion de LEONHARDT et WALTHER, si l'on peut admettre une analogie de treillis il s'agit plutôt d'un treillis hyperstatique, dont les membrures tendue et comprimée ne sont pas parallèles. Cette conception d'un treillis intérieurement hyperstatique est imposée par la condition d'incompatibilité et de rigidité différente des éléments composants. Par exemple, pour $\tau_0 = 20$ kgf/cm^2 et $\sigma^0_{cyl} = 250$ kgf/cm^2 les déformations unitaires dans les bielles en béton sont $\varepsilon_b = \frac{20}{330\,000} \approx 6 \cdot 10^{-5}$, tandis que les déformations dans les étriers en acier à haute résistance sont $\varepsilon'_a = \frac{2400}{2{,}1 \cdot 10^6} = 120 \cdot 10^{-5}$, avec la contrainte admissible $\sigma^1_{te} = 2400$ kgf/cm^2.

Cela indique que les bielles en béton ont une rigidité environ 20 fois plus grande que l'armature transversale.

Une relation semblable intervient entre la membrure comprimée en béton et la membrure tendue en acier. En conséquence, l'effort N_b dans la membrure comprimée n'est ni égal ni parallèle à l'effort de traction N'_a.

En tenant compte de ces arguments, LEONHARDT et WALTHER considèrent qu'il serait plus conforme à la réalité d'admettre un treillis avec des connexions intérieures surabondantes et avec la membrure comprimée courbe (fig. 6-9).

Un élément du treillis classique transmet une partie des efforts d'autant plus grande que sa rigidité est plus importante. D'où la conclusion qu'en augmentant l'épaisseur d'une nervure on augmente l'effort transmis par le béton et on diminue l'effort transmis par les étriers. Cette relation est un des résultats des essais de Stuttgart et elle est représentée sur la figure 6-10.

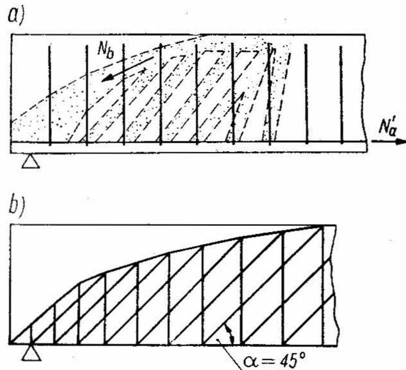


Fig. 6-9. Schéma d'un treillis fictif de LEONHARDT et WALTHER avec des liaisons surabondantes ; a) schéma proche de la réalité, b) schéma idéal

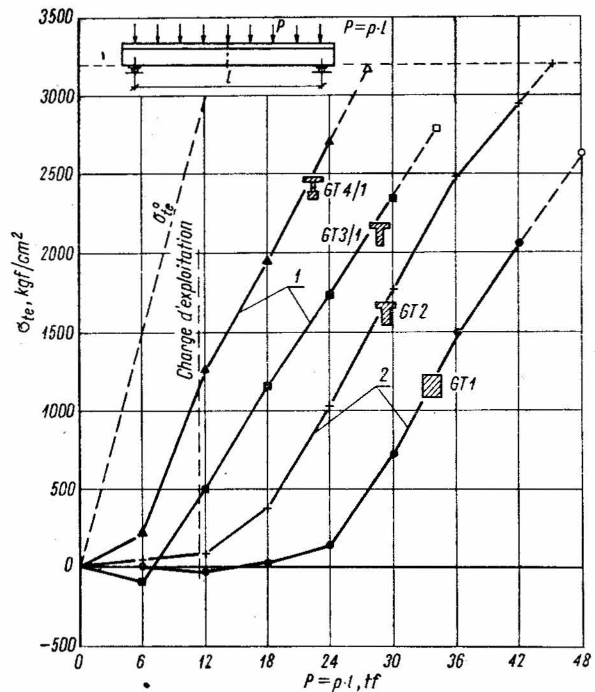


Fig. 6-10. Valeurs des contraintes σ_{te} en fonction de la largeur b de la poutre et de l'intensité de la charge, avec $\eta = 0{,}3$ [51]

1 — rupture par cisaillement, 2 — rupture par flexion

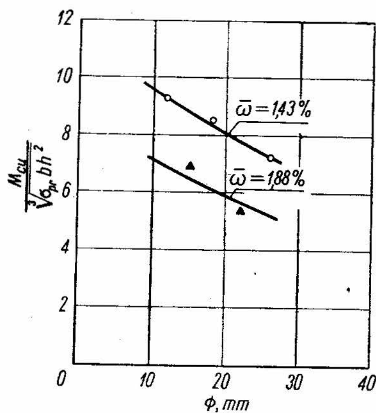


Fig. 6-11. Influence du diamètre de la barre sur la valeur du moment réduit de rupture par cisaillement [51]

○ essais des dalles

▲ essais des poutres

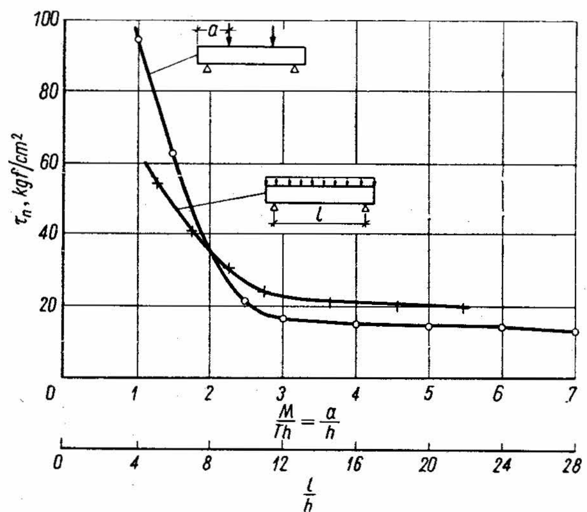


Fig. 6-12. Influence de l'élancement de cisaillement sur la valeur de τ_n dans les poutres en béton de résistance 350 kgf/cm² [51]

Les résultats des études expérimentales indiquent ensuite que la capacité portante d'un élément en béton armé (qui peut être exprimée par la valeur réduite du moment de cisaillement) dépend de l'adhérence du béton à l'acier, donc indirectement, du diamètre des armatures (fig. 6-11). Cela est, bien entendu, impossible à considérer par analogie avec un treillis classique.

LEONHARDT et certains chercheurs américains suggèrent avec beaucoup de raison que la valeur des contraintes de cisaillement τ_0 ne peut pas être un critère unique dans le problème du cisaillement. Des essais de Stuttgart il résulte que la capacité d'un élément en béton armé de transmettre les contraintes de cisaillement augmente lorsque diminue « l'élancement de cisaillement », lequel peut être exprimé par le rapport $\frac{M}{Th}$. La figure 6-12 prouve que cette influence devient très importante pour $l/h < 12$ dans le cas d'une charge uniformément répartie, et pour $a/h < 3$ dans le cas d'une charge concentrée. L'augmentation rapide des contraintes de cisaillement au moment de l'épuisement de la capacité portante τ_u, l'augmentation observée avec de faibles élancements de cisaillement, doit être expliquée par le fait que, dans les poutres courtes, c'est le schéma d'arc (fig. 6-13 a et b) ou bien de treillis muni d'un seul croisillon entre la charge concentrée et l'appui (fig. 6-13 c et d) qui joue le rôle prépondérant. Par conséquent, dans ces poutres il est indispensable de bien ancrer les armatures longitudinales, et on ne doit pas les affaiblir par une adaptation stricte des barres au diagramme des moments fléchissants.

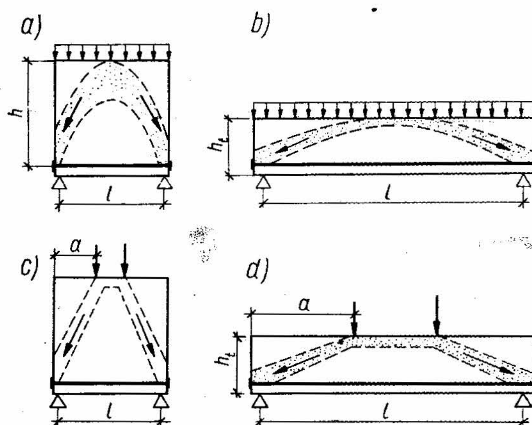


Fig. 6-13. Schémas d'un arc avec tirant et d'une structure exerçant la poussée, qui représentent les efforts internes dans une poutre en béton armé

Les essais de Stuttgart ont montré que le comportement d'une poutre est complexe. Le schéma d'arc est prépondérant sous les charges peu élevées (petites valeurs de τ_0) ; par contre, avec l'augmentation de la charge et du nombre des fissures obliques le schéma de treillis commence à jouer un rôle plus important. Ce passage entre ces deux schémas ne

concerne pas les poutres courtes ni surtout les poutres-cloisons où, conformément aux essais de l'auteur [25], le schéma d'arc conserve son importance aussi après la fissuration.

Le problème de l'analogie avec un treillis est un peu différemment considéré par RÜSCH dans l'ouvrage [73] et par KANI (sous-chapitre 4.7). Selon leur opinion, la poutre en béton armé après la fissuration prend la forme d'un peigne avec des dents obliques et avec le dos formé par la zone comprimée du béton. Le nombre et la forme des dents en béton sont déterminés par la morphologie des fissures. Si l'on coupe dans cette structure toutes les armatures aux points où elles sont traversées par les fissures, on obtient un schéma fondamental isostatique en béton. Ce schéma ne peut, bien entendu, supporter aucune charge. Sa capacité portante est regagnée après l'application des efforts X_i et Y_i dans les armatures longitudinale et transversale ; ces efforts sont des valeurs surabondantes. La figure 6-14 représente ce schéma statique où les symboles X_1 à X_7 désignent les efforts inconnus dans l'armature longitudinale et X_8 à X_{14}, les efforts inconnus dans l'armature

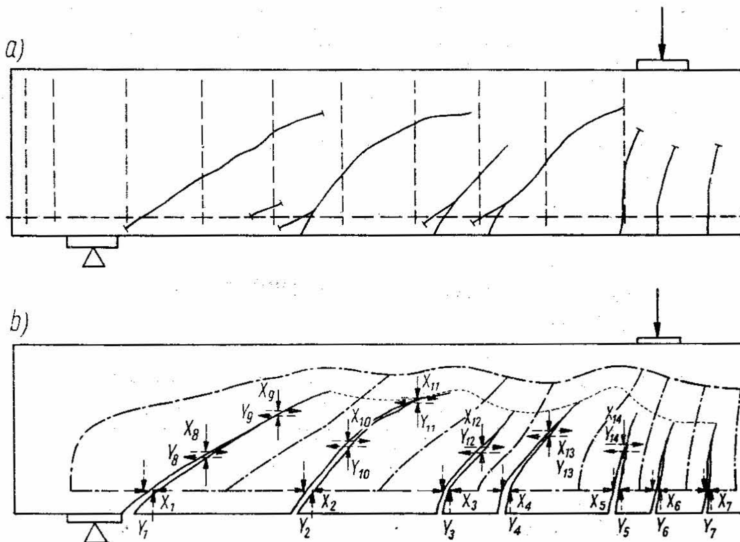


Fig. 6-14. Schéma fondamental et efforts surabondants dans les barres d'une poutre fissurée en béton armé : a) disposition des fissures, b) schéma fictif d'un treillis avec des liaisons surabondantes [73]

transversale. Etant donné que les armatures assurant les liaisons entre les bords voisins des fissures agissent comme les billots dans une poutre en bois, donc, en plus des efforts X_i appliqués suivant les axes des barres, apparaîtront des efforts surabondants Y_1 à Y_{14}, dirigés transversalement. Nous voyons ainsi que même dans un schéma idéal pour la moitié de la portée d'une poutre on a 28 valeurs surabondantes. Leur nombre pour une poutre entière soumise, par exemple, à une charge dissymétrique peut dépasser 50.

Bien entendu, dans la plupart des cas, une partie des valeurs surabondantes peut être négligée. Par exemple, dans la poutre représentée sur la figure 6-14 on peut faire abstraction des efforts transversaux dans les étriers minces désignés par Y_8 à Y_{14}.

La solution d'un tel problème avec plusieurs valeurs surabondantes ne présente maintenant aucune difficulté particulière grâce aux calculateurs électroniques. Néanmoins, l'exécution de calculs tellement onéreux pour le dimensionnement d'une poutre n'est pas raisonnable. Ces calculs peuvent être effectués dans le cadre d'une analyse théorique pour expliquer les phénomènes dans le processus de rupture dans la zone de cisaillement. Le schéma de RÜSCH a cet avantage que, vu le nombre élevé des inconnues, on peut négliger quelques paramètres ou même les introduire d'une façon erronée sans nuire au résultat final des calculs. D'après une analyse théorique basée sur le schéma représenté sur la figure 6-14 RÜSCH a formulé la conclusion que l'armature transversale a une influence importante sur la répartition des contraintes de traction dans l'armature principale. De plus, RÜSCH considère que les efforts Y_1 Y_7 situés près du bord inférieur (fig. 6-14) produisent des contraintes de traction considérables dans le béton. Sous une charge voisine de la charge de rupture ces contraintes mènent à l'éclatement du revêtement en béton et elles doivent être transmises par les étriers ; ces efforts peuvent donc être négligés. Pour les cas pratiques cette supposition est très justifiée, car contrairement aux conditions de laboratoire, les facteurs temps et température diminuent la résistance du béton à la traction. Si l'on suppose de plus que dans les poutres correctement armées l'espacement des fissures est petit, on peut faire abstraction également de l'influence de la rigidité sur la flexion des dents en béton séparées par les fissures obliques. De cette façon, RÜSCH est arrivé finalement au schéma du treillis de MÖRSCH avec la seule différence que l'angle d'inclinaison des bielles comprimées en béton n'est pas défini *a priori*. Selon l'opinion de RÜSCH l'état d'équilibre du treillis peut être assuré également quand le cisaillement n'est pas entièrement transmis par l'armature. Cependant, cela a pour effet que les bielles en béton sont moins inclinées sur l'axe de la poutre que 45° et l'effort N_a' dans l'armature principale dans le segment de cisaillement est plus grand. L'effort augmenté N_a' peut être calculé, pour une poutre simplement appuyée et chargée par deux forces concentrées, d'après le diagramme des moments fléchissants. Les ordonnées de ce diagramme résultent du déplacement de M_{max} vers les appuis d'un segment v. Pour ce schéma de la poutre le coefficient de déplacement des ordonnées peut être calculé, d'après les hypothèses simplificatrices de RÜSCH, par la formule suivante

$$\frac{v}{z} = \frac{0{,}46}{\eta}(1+\cot\theta) - \cot\theta, \tag{6.1}$$

où η est le coefficient indiquant la partie de l'effort tranchant transmise par l'armature transversale,
θ, l'angle d'inclinaison des étriers,
z, le bras de levier des efforts internes.

La figure 6-15 représente les diagrammes du rapport $\frac{v}{z}$ en fonction de η pour les angles d'inclinaison des étriers

$$\theta = 45°, 60° \text{ et } 90°.$$

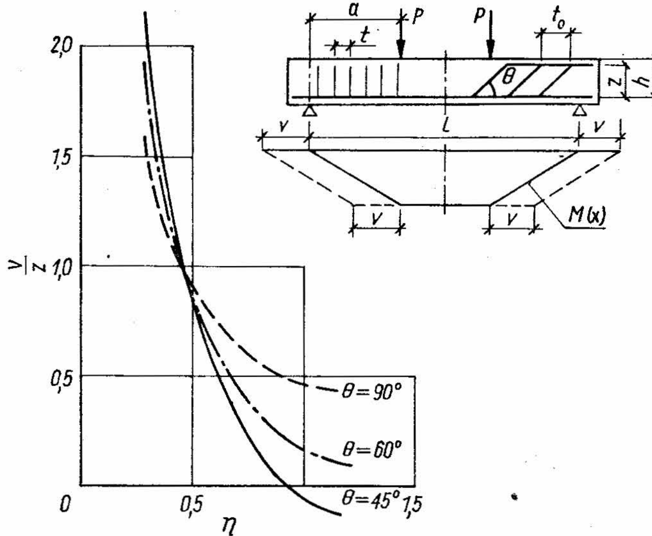
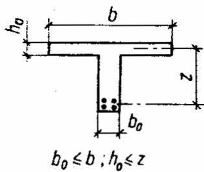


Fig. 6-15. Valeur v/z en fonction du pourcentage de cisaillement transmis par les armatures et de l'angle θ des barres relevées

Une autre modification du treillis de MÖRSCH a été réalisée par KUPFER [47]. De même que RÜSCH, il a admis une inclinaison plus petite que 45° des bielles comprimées avec les membrures comprimée et tendue parallèles. Dans ses considérations KUPFER a supposé la zone de cisaillement $\bar{s}$ libre de toutes les perturbations dues aux forces concentrées (fig. 6-16). Après avoir désigné les efforts et les grandeurs géométriques conformément à la figure 6-17, on peut déduire l'angle α d'inclinaison des bielles comprimées de la condition du minimum d'énergie de déformation ; d'où finalement on obtient l'équation



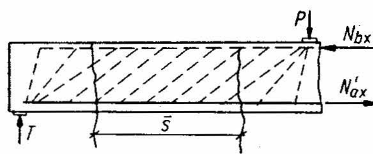


Fig. 6-16. Schéma du treillis fictif de KUPFER

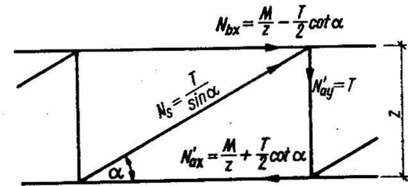


Fig. 6-17. Schéma des efforts internes dans le treillis de KUPFER

$$\text{tg}^3\alpha - \frac{\sigma_a - n\sigma_{br}}{2\sigma_{te}}\,\text{tg}\alpha - \frac{n\tau}{\sigma_{te}}(1-\text{tg}^4\alpha) = 0 \tag{6.2}$$

En utilisant l'équation (6.2) KUPFER a obtenu les diagrammes représentés sur la figure 6-18. La disposition de ces courbes nous indique qu'avec l'accroissement des paramètres

$\frac{n\tau}{\sigma_{te}}$ et $\frac{\sigma_a - n\sigma_{br}}{\sigma_{te}}$ les valeurs de tgα s'approchent d'une façon asymptotique de la valeur limite tgα = 1,0, donnée par MÖRSCH. D'où il résulte que la diminution des contraintes de cisaillement, l'augmentation des contraintes dans les étriers et dans la zone comprimée du béton et la chute des contraintes dans les armatures longitudinales produisent une diminution de l'angle d'inclinaison des bielles comprimées en béton (fig. 6-18).

Après ces considérations, une question se pose : ne doit-on pas remplacer le treillis isostatique de MÖRSCH par le schéma de treillis de LEONHARDT et WALTHER, ou bien admettre le concept d'un treillis de KUPFER avec l'inclinaison diminuée des bielles comprimées, et de cette façon obtenir une justification théorique de la réduction de l'armature transversale ? Pour une décision au sujet de ce problème il faut d'abord répondre à deux questions fondamentales :

1. Dans quelle mesure une modernisation du treillis de MÖRSCH pourrait-elle compliquer la méthode, actuellement simple, de dimensionnement des éléments en béton armé vis-à-vis du cisaillement ?

2. Est-ce qu'après l'introduction de toutes les modifications dans le schéma du treillis de MÖRSCH celui-ci maintiendra sa validité générale pour tous les cas pratiques ?

Une réponse à la première question a été donnée partiellement par LEONHARDT lui-même. D'abord, il a été un opposant décidé de la théorie classique de MÖRSCH, mais

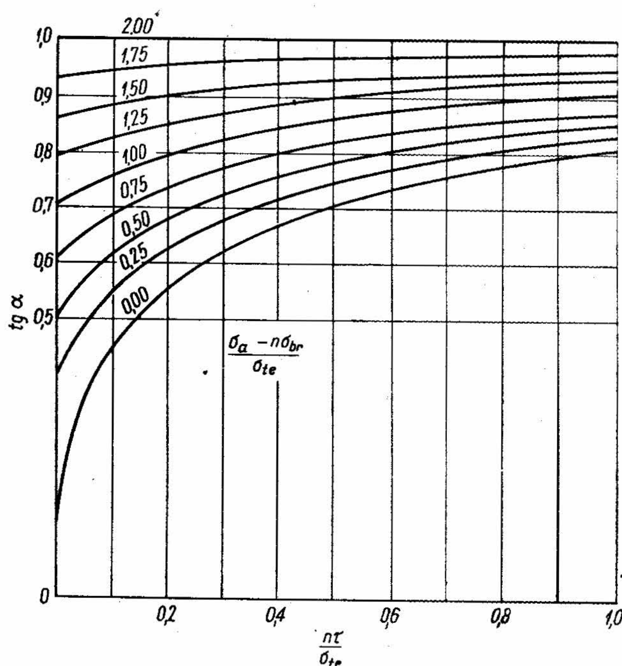


Fig. 6-18. Relation entre l'angle d'inclinaison des bielles en béton et les contraintes de cisaillement et de compression dans le béton et les contraintes dans les armatures longitudinales et transversales, d'après KUPFER

ensuite, dans l'ouvrage [55], il a constaté que le dimensionnement vis-à-vis du cisaillement selon le schéma du treillis avec connexions intérieures surabondantes est trop pénible pour les besoins de la pratique. Le schéma du treillis de KUPFER n'introduit pas autant de complications dans le calcul des sections que le treillis hyperstatique avec la membrure supérieure courbe. Cependant, l'hypothèse des membrures parallèles et des bielles d'inclinaison inférieure à 45° limite l'utilité de ce schéma aux poutres en forme de T, avec une nervure très étroite et un hourdis large (fig. 6-16).

Pour répondre à la seconde question il faut considérer le problème contestable de l'influence du mode d'application des charges extérieures sur la valeur du moment de rupture par cisaillement. Il faut tenir compte de ce problème dans le choix du treillis fictif.

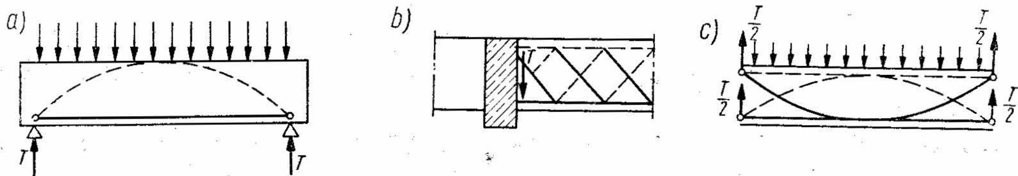


Fig. 6-19. Schéma de la poutre en béton armé d'après RAUSCH : a) poutre simplement appuyée, b) poutre encastrée dans une poutre-maîtresse, c) poutre appuyée sur toute sa hauteur

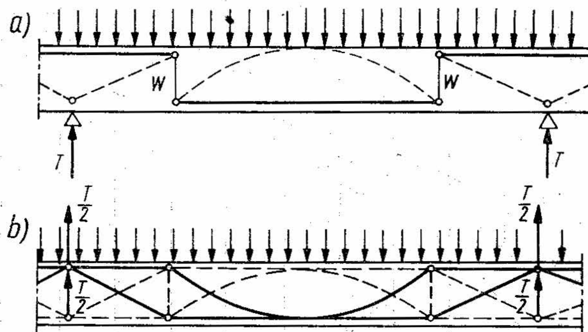


Fig. 6-20. Schéma d'une poutre continue d'après RAUSCH

Il est utile de rappeler ici le raisonnement de RAUSCH dans l'ouvrage [66]. Il a constaté que le schéma d'un arc avec tirant ou le schéma d'un cadre exerçant la poussée ne peuvent apparaître que dans les cas où les efforts des appuis sont appliqués à la face inférieure et les charges à la face supérieure (voir figure 6-19a). Ces cas qui fournissent des arguments pour le treillis de LEONHARDT et WALTHER ne sont pas très fréquents dans la pratique. Partout où une nervure est encastrée dans une poutre-maîtresse, ou une poutre dans un poteau plus large ou bien dans une poutre-cloison, les efforts d'appui sont transmis sur la poutre suivant toute la hauteur de la section (fig. 6-19b). En simplifiant cette sorte d'appui on peut admettre que l'effort est décomposé en deux composantes égales, une

appliquée dans la zone de la face inférieure de la poutre et l'autre, dans la zone de la face supérieure (fig. 6-19c). Selon l'opinion de RAUSCH, en dehors d'un arc avec tirant on peut distinguer ici un arc tendu renversé avec une membrure droite comprimée, correspondant à la zone comprimée de la poutre, (fig. 6-19c). Cet arc renversé avec la membrure tendue courbe met en évidence la nécessité, dans ce cas, d'une armature oblique transversale conformément au treillis classique de MÖRSCH. Un schéma semblable a été admis par RAUSCH dans les poutres continues où, d'après lui, le schéma d'un arc avec tirant était conditionné par une « suspente » *W* située au point des moments fléchissants nuls, (fig. 6-20a). En réalité cette suspension n'existe pas ; si on la construisait elle ne saurait pas sur quoi transmettre les réactions de l'arc ou du treillis de membrure comprimée courbe, fictive-

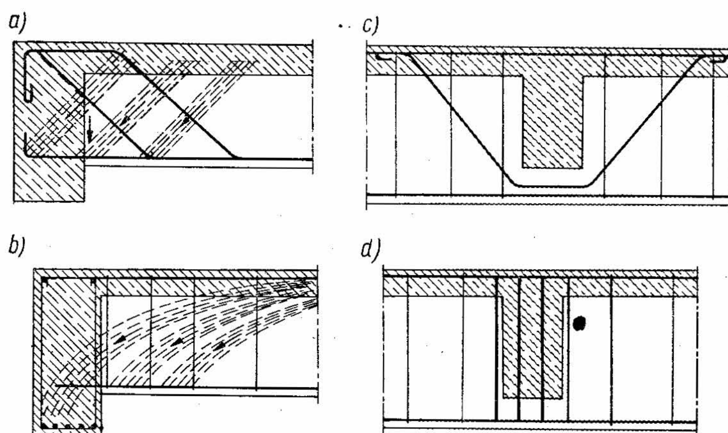


Fig. 6-21. Transmission des efforts d'une nervure sur la poutre-maîtresse et disposition de l'armature de la poutre-maîtresse supportant la nervure, d'après LEONHARDT

ment déterminés dans la poutre. Par conséquent, il y aurait donc (comme dans le cas représenté sur la figure 6-19c) un schéma composé de deux arcs ; un arc comprimé et l'autre tendu (fig. 6-20b).

Une opinion opposée a été formulée cependant par LEONHARDT [55]. D'après lui, dans la zone voisine de l'appui d'une poutre encastrée dans une poutre-maîtresse, vu la rigidité considérable des bielles comprimées en béton (fig. 6-21a) et la faible rigidité des armatures relevées, on aura un schéma représenté sur la figure 6-21b. Ce schéma est analogue à celui où les réactions d'appui sont appliquées à la surface inférieure. En conséquence, dans une poutre entièrement encastrée dans une poutre-maîtresse, LEONHARDT suggère une armature locale dans la poutre-maîtresse composée d'étriers (fig. 6-21d). Ces étriers pourraient transmettre la réaction d'appui de la poutre sur la partie supérieure de la poutre-maîtresse. La transmission de cette réaction par les barres relevées n'est pas correcte (fig. 6-21c).

Dans une poutre continue, d'après LEONHARDT, la situation est également différente de celle présentée précédemment par RAUSCH. Il suppose que l'appui d'un arc comprimé

fictivement séparé dans la poutre n'est pas situé au point de moment nul mais qu'il est déplacé vers l'appui de la poutre (fig. 6-22). Ceci signifie qu'au point de moment nul les contraintes dans les armatures principales sont du même ordre de grandeur qu'au point de M_{max}.

Il est difficile de connaître la réalité, mais probablement elle se trouve entre ces deux opinions, comme c'est souvent le cas dans les questions discutables. L'opinion de LEONHARDT est certainement juste en ce qui concerne le comportement des nervures très larges,

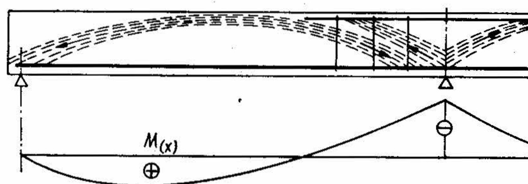


Fig. 6-22. Schéma d'une poutre continue d'après LEONHARDT

en béton et acier de haute résistance. Dans ces cas, effectivement, l'effort tranchant des nervures est transmis principalement par l'intermédiaire des bielles obliques en béton sur la partie inférieure de la poutre-maîtresse (fig. 6-21b). Par contre, quand le béton est faible et les sections de l'armature considérables, avec la valeur de Q'_a petite, la situation effective peut être proche de celle qui est indiquée par RAUSCH (fig. 6-19c). De plus, il faut alors prévoir que les déformations plastiques du béton (fluage) ont également une influence sur la diminution de la rigidité des bielles en béton. Cela conduit aussi à l'augmentation du rôle des armatures transversales. D'où la conclusion qu'à mesure que le temps s'écoule une partie de plus en plus grande de la réaction de la nervure sera transmise par les barres relevées et par les étriers à la partie supérieure de la poutre-maîtresse.

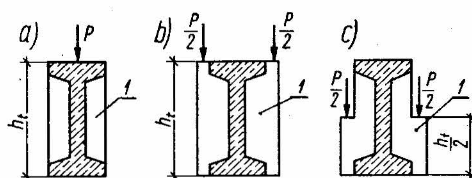


Fig. 6-23. Modes de transmission des efforts sur une poutre : a) la force est appliquée directement sur la face supérieure, b) la force est appliquée au niveau de la face supérieure par l'intermédiaire de cloisons perpendiculaires, c) la force est transmise par les cloisons à mi-hauteur de la poutre
1 — cloison en béton armé située dans le plan d'application de la force P

Il est encore à remarquer que le schéma d'une poutre en forme d'un arc avec tirant est lié également à la nature de la charge de cette poutre dans la travée. La figure 6-23 représente trois modes d'application de la charge concentrée sur une poutre. Les essais où l'on a utilisé ces modes de charge (direct et indirect sur la face supérieure et indirect à mi-hauteur) ont été effectués en 1962 à Lehigh University. D'après les résultats on a cons-

taté que dans le deuxième cas de charge (fig. 6-23b) la capacité portante de la poutre était inférieure de 16 % par rapport au premier cas, tandis que dans le troisième cas la diminution était égale à 26 % (fig. 6-23c).

L'influence du mode d'application de la charge sur les états de fissuration, de flexion et de rupture a été étudiée à Stuttgart (Leonhardt-Walther-Dilger DAfSt. Heft 201, 1968). On a essayé des poutres à une ou deux travées, appuyées directement ou indirectement. L'appui indirect des poutres longitudinales était constitué par des poutres transversales à section rectangulaire. La figure 6-24 montre la morphologie des fissures dans les poutres *HI* 1 et *HI* 2 sous les charges $2P = 10{,}0$; 30,0 ; 45,0 tf. Ce sont des poutres à deux travées à section en T, appuyées indirectement au centre sur une poutre transversale à section rectangulaire. Les appuis aux extrémités transmettent les réactions directement sur les bords inférieurs des poutres. Pour comparer les résultats, une poutre *HQ* 2 a été réalisée avec tous les appuis directs, donc transmettant les réactions sur les bords inférieurs. Les armatures longitudinale et transversale de ces poutres étaient identiques et la résistance

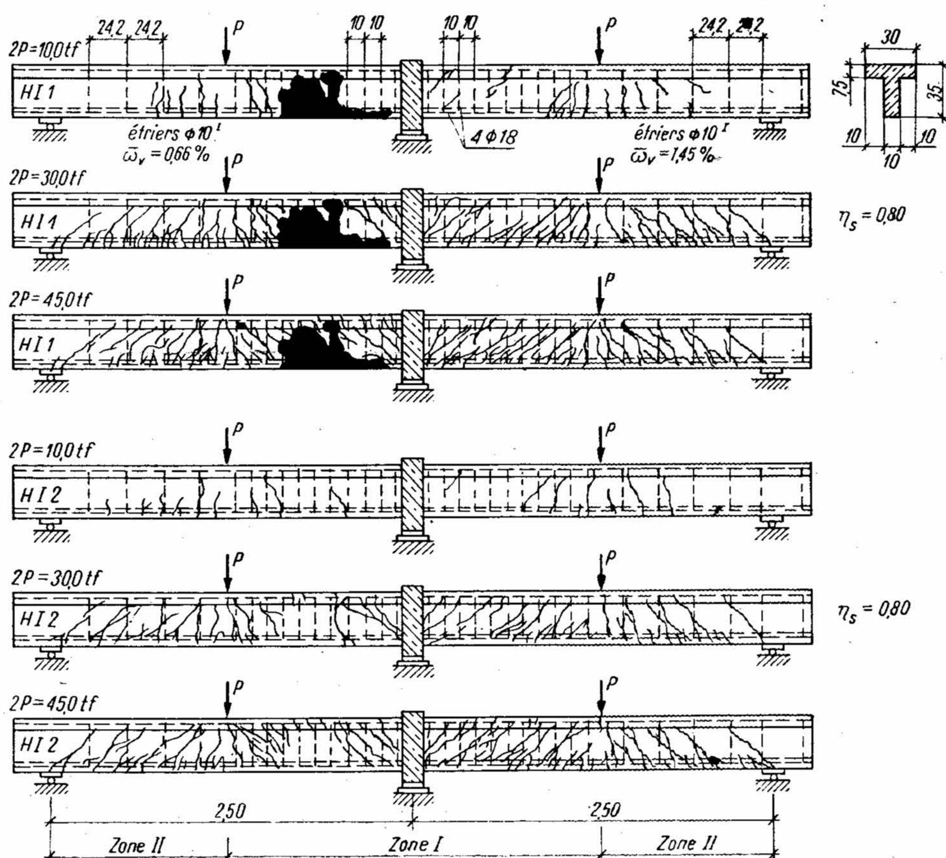


Fig. 6-24. Fissuration des poutres *HI*1 et *HI*2 d'après [56]

du béton semblable, de l'ordre de grandeur $\sigma_{wu} = 350$ kgf/cm². L'armature transversale était composée d'étriers verticaux assurant le coefficient $\eta = 0{,}80$ dans la zone de l'appui central (zone *I*).

La figure 6-25 montre les contraintes dans les étriers dans la zone *I*. Il résulte de ces diagrammes que dans le cas d'un appui indirect (en allemand, indirektere Lagerung), les contraintes dans les étriers des poutres *HI* 1 et *HI* 2 sont un peu plus grandes que dans la poutre *HQ* 2, d'où l'on conclut que la résultante des contraintes de compression dans la zone comprimée de la poutre est moins inclinée dans le cas de la transmission indirecte de la force concentrée. Par cette constatation le comportement d'une poutre chargée indirectement semble se rapprocher du schéma du treillis fictif de Mörsch, lequel a supposé que les efforts dans les membrures comprimée et tendue sont horizontaux et, par conséquent, parallèles à l'axe de la poutre.

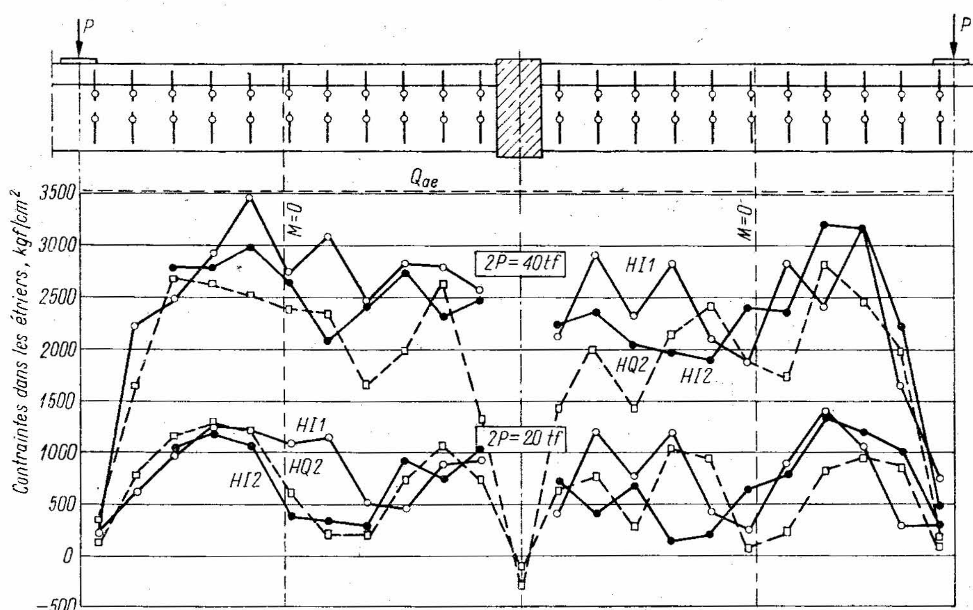


Fig. 6-25. Contraintes des étriers dans la zone *I* pour $2P = 20$ tf et 40 tf, d'après [56]

La figure 6-26 représente la moyenne des contraintes en fonction de la charge dans quatre étriers dans la zone *I* des poutres en question. Il résulte de ces diagrammes que la différence entre les contraintes dans les étriers des poutres chargées indirectement et directement est de l'ordre de 8 à 10 %. Selon l'opinion de Leonhardt, Walther et Dilger on peut calculer les contraintes dans les étriers des poutres chargées indirectement à partir de la formule

$$\sigma_{te}^{0} = \frac{\tau_0 - \tau_{fu1}}{\overline{\omega}_v},$$

où, pour les poutres appuyées indirectement, on peut faire $\tau_{fu1} = 0{,}03\sigma_{wu}$.

Dans leurs conclusions finales, LEONHARDT, WALTHER et DILGER constatent, en se basant sur les essais de Stuttgart et sur des essais analogues effectués par T. HAGEBERG à Trondheim, que dans les poutres appuyées indirectement les contraintes dans les étriers sont plus petites que celles calculées d'après l'analogie du treillis de MÖRSCH. Indépendamment de cette conclusion, dans la poutre à deux travées, avec $\eta = 0{,}80$, la capacité portante complète n'était pas obtenue. Le moment de rupture dans la poutre *HI* 1, où on a observé la plastification des étriers, était inférieur de 15 % à celui de la poutre *HQ* 2. Ceci indique que les poutres chargées indirectement doivent être munies d'un nombre plus élevé d'étriers que les poutres chargées directement. Les premières fissures obliques dans les poutres appuyées indirectement s'ouvrent plus tôt, sous les contraintes $\tau = 0{,}022$ à $0{,}029\, \sigma_{wu}$, tandis que dans le cas d'un appui direct $\tau_{fu1} = 0{,}031\, \sigma_{wu}$. L'inclinaison moyenne des fissures obliques dans ces deux modes d'appui était égale à 39° environ. Les flèches des poutres *HI* 1 et *HI* 2 étaient supérieures de 8 % environ aux flèches de la poutre *HQ* 2, mais l'ouverture des fissures obliques était à peu près la même pour ces trois poutres.

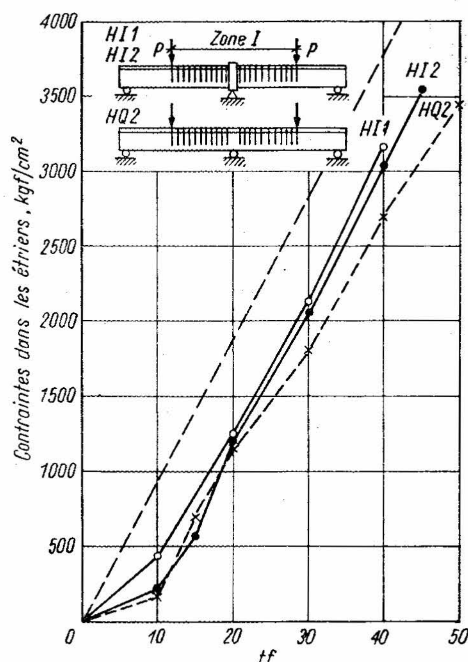


Fig. 6-26. Contraintes des étriers dans la zone *I* d'après [56]

Ce problème a été examiné également par H. RÜSCH et T. BAUMANN [75], qui ont étudié des poutres à section rectangulaire. La disposition de la charge, l'armature et la nature des appuis sont représentés sur la figure 6-27. Dans ces poutres de 32 cm de hauteur, les zones tendues, de 20 cm de hauteur, ont été réalisées en béton de qualité B300 et la zone comprimée, de 12 cm de hauteur, en béton de qualité B600. Les valeurs de calcul et les résultats des essais sont présentés dans le tableau 6-1. La figure 6-28 montre la fissuration et les déformations maximales des étriers en fonction de leur position et de la charge.

D'après leurs essais, RÜSCH et BAUMANN ont formulé la conclusion que dans les poutres caractérisées par l'élancement $a/h_t > 3{,}0$, le mode d'application de la charge n'a d'importance que dans le voisinage immédiat de la force concentrée. Cette constatation concerne les poutres munies d'étriers concentrés aux points de croisement avec des poutres perpendiculaires, pour transmettre l'effort tranchant total T sur la zone comprimée de la poutre. Malgré une armature transversale suffisante (Aufhängebewehrung) assurant cette transmission, dans les poutres à charge indirecte la possibilité d'épuisement de la capacité portante augmente par suite des glissements des barres dans les ancrages (Verankerungsbruch). Par conséquent, la longueur d'ancrage suffisante pour l'appui direct n'est plus suffisante dans le cas de l'appui indirect ; les auteurs de l'ouvrage [65] préconisent dans ce cas l'emploi des crochets (Winkelhaken).

TABLEAU 6-1

Indicatif de la poutre	Valeurs de calcul correspondant à la rupture			Résultats des essais								
	$\overline{M}_u$ tfm	$\overline{T}_u$ tf	$\overline{\tau}_{0,u}$ kgf/cm²	Disposition de la charge et mode de rupture A	Disposition de la charge et mode de rupture B	Mode de rupture	Rupture au centre de la portée	M_u tfm	T_u tf	$\tau_{0,u}$ kgf/cm²	$\frac{M_u}{\overline{M}_u}$	$\frac{T_u}{T^k}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
64/1	11,91	10,81	41,0	1,10 0,80 1,10		Rupture par flexion	—	11,40	10,35	39,20	0,96	2,71
65/1	11,90	10,80	41,0	1,10 0,80 1,10		Glissement dans une poutre transversale d'appui	*B*	11,75	10,65	40,30	(0,99)	2,57
				0,80 0,80 0,80		Rupture par flexion	*A*	11,40	14,23	54,00	0,96	3,44
65/2	12,00	10,90	41,2			Rupture par flexion de la zone comprimée	*A*	10,40	9,45	35,80	0,87	2,52
				enveloppé		Rupture par flexion	*B*	11,50	10,50	39,80	0,96	1,98
				enveloppé		Glissement de l'armature principale dans l'ancrage	*A*	—	11,50	41,50	—	3,07

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
65/3	11,55	10,48	39,7			Glissement des abouts des armatures dans les ancrages	*A* et *B*	8,08	7,35	27,80	(0,70)	1,44
						Rupture par flexion de la zone comprimée	*A*	10,40	9,45	35,80	0,90	2,61
				enveloppé		Plastification des étriers dans la zone des efforts tranchants considérables	*A*	—	10,07	38,10	—	2,78
				enveloppé		Eclatement du béton comprimé dans la zone armée par les bandages	*B*	—	11,42	43,3	—	2,23

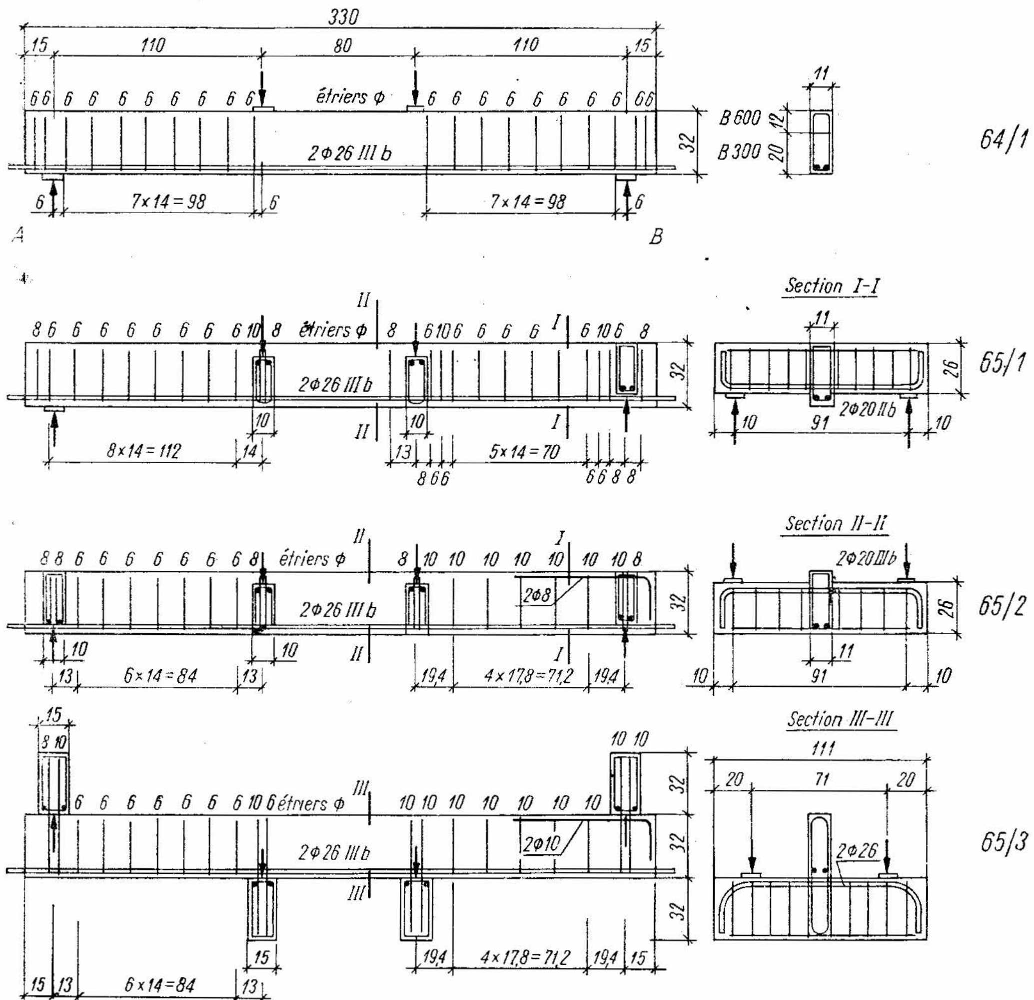


Fig. 6-27. Disposition des charges et des armatures dans les poutres 64/1, 65/1, 65/2 et 65/3

Après avoir considéré toutes ces opinions sur l'analogie du treillis de Mörsch, on peut formuler les conclusions suivantes.

1. L'analogie du comportement d'une poutre avec celui d'un treillis classique ne satisfait qu'aux conditions d'équilibre en négligeant la condition d'incompatibilité. En conséquence, un seul état d'équilibre est défini parmi tous les états possibles.

2. L'armature transversale déterminée par l'analogie du treillis ne peut éliminer l'épuisement de la capacité portante de la zone de cisaillement que dans le cas où les déformations, déduites de la condition d'incompatibilité, ne dépassent pas les limites imposées par la déformabilité plastique du béton.

3. L'analogie du treillis classique, malgré de nombreux défauts, est la plus générale et la plus simple parmi tous les schémas proposés jusqu'à maintenant. La disposition effec-

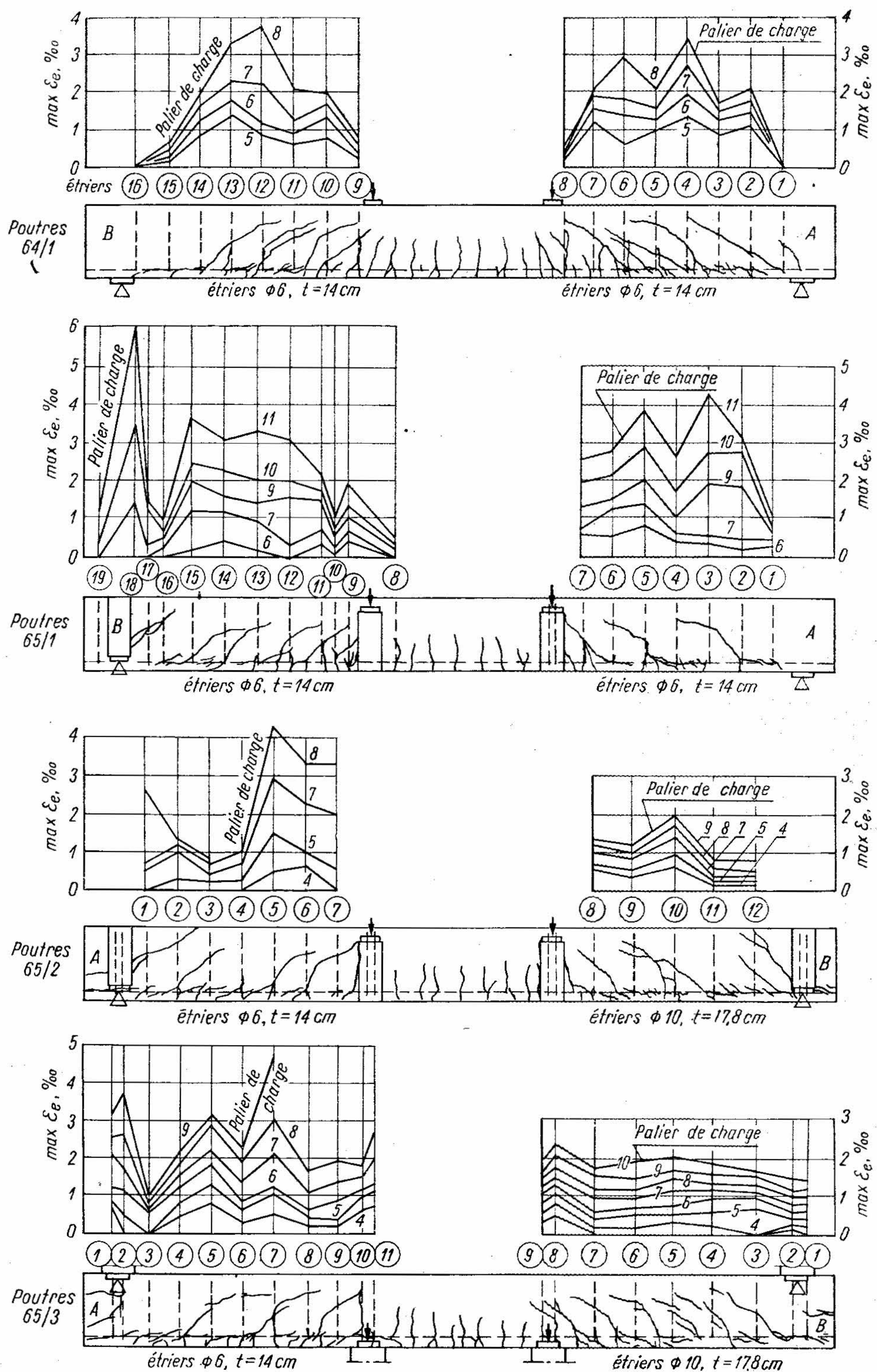


Fig. 6-28. Fissuration et déformations des poutres 64/1, 65/1, 65/2, 65/3 au dernier palier de mise en charge

tive des efforts dans la zone de cisaillement est tellement complexe que la méthode simple de l'analogie avec un treillis classique a des avantages incontestables.

4. Il est bien entendu qu'avec sa simplicité et sa vue générale du problème complexe du cisaillement, la méthode discutée mène dans de nombreux cas à l'emploi de quantités excessives de béton et d'acier. Souvent, on peut éviter la rupture de la zone de cisaillement en utilisant une armature transversale beaucoup moins importante que celle calculée par la méthode du treillis de Mörsch, car dans la plupart des cas ce schéma conduit à un coefficient de sécurité excessif.

5. L'emploi rationnel de la méthode en question, en l'adaptant aux technologies modernes d'exécution (bétons vibrés, acier crénelé, bétons de haute résistance) exige l'application de divers coefficients de correction. Cela, à son tour, demande que le projeteur soit compétent dans le domaine du cisaillement et surtout qu'il soit informé de l'ensemble des résultats expérimentaux.

6.4. CAPACITÉ PORTANTE LIMITE DE LA ZONE DE CISAILLEMENT

La plupart des méthodes déterminant la capacité portante limite, et surtout des méthodes d'importance pratique, sont basées sur l'hypothèse de contraintes limites dans le béton et dans l'acier dans la section dite de rupture. On admet ici que la fissure oblique a tellement pénétré dans la poutre que celle-ci est divisée en deux parties avant l'épuisement de la capacité portante, ces parties étant liées entre elles par le béton de la zone comprimée non fissurée et, dans la zone fissurée, par les armatures qui coupent la fissure oblique.

Dans cette situation, quand le volume de l'armature est insuffisant, la rupture est provoquée par l'acier pour $\sigma_a = Q'_a$; dans le cas contraire, la rupture est due au béton qui, dans la section au-dessus de la fissure oblique, subit le cisaillement dit pur. En ce qui concerne l'armature, divers auteurs sont d'accord qu'à l'état limite de rupture les contraintes dans l'acier atteignent la limite d'élasticité et les efforts dans les barres sont dirigés suivant leurs axes. Le problème de la capacité portante de la zone non fissurée du béton au-dessus de la fissure oblique est beaucoup plus discutable. Afin d'éclaircir un peu cette question considérons d'abord les méthodes présentées précédemment au chapitre 4.

Borichanski en se basant sur les résultats de ses essais [11], a proposé de considérer l'effort tranchant transmis par le béton comme une fonction de l'angle α d'inclinaison de la fissure oblique, et il a donné la relation suivante

$$V_b = \frac{0{,}15bh\bar{\sigma}_b}{\cot\alpha}.$$

Etant données la qualité du béton, l'aire de la section et la longueur de projection de la fissure, il obtient une valeur constante de V_b.

Cette hypothèse comporte des simplifications très avancées. Elle facilite largement les calculs, mais les résultats obtenus sont bien éloignés des valeurs effectives, d'autant plus qu'il est impossible de prévoir *a priori* ou de calculer avec précision la valeur de l'angle α.

Pour formuler ses conclusions et recommandations pour le dimensionnement BORICHANSKI utilisait exclusivement ses essais personnels qui, bien que très nombreux, ne peuvent pas être considérés comme universels. BORICHANSKI était probablement influencé par les essais préliminaires effectués sur des poutres en béton armé avec des fissures artificielles inclinées suivant un angle variable sur l'axe longitudinal (fig. 4-1). Il a, de ce fait, surestimé le rôle de cet angle aussi dans les essais fondamentaux, en choisissant la forme de l'armature (fig. 6-29).

L'armature des poutres ainsi conçue permettait d'obtenir dans les essais diverses inclinaisons, précédemment définies, des fissures obliques ; mais elle n'était pas sans influence sur la capacité portante des poutres, et il était plus difficile de formuler des conclusions. En général, on pourrait avancer la thèse qu'à la suite des essais arrangés d'une telle façon BORICHANSKI a proposé des conclusions trop optimistes et cela pour deux raisons.

D'abord, la valeur V_b obtenue dans les essais de BORICHANSKI est trop élevée. En conséquence, malgré l'adoption du coefficient $k = 0,15$ à la place du coefficient expérimental $k_{moyen} = 0,185$, la solution basée sur cette valeur ne correspond pas à une sécurité accrue.

Ensuite, il a été établi, d'après plusieurs autres expériences présentées dans le chapitre 5, que la valeur de V_b dépend non seulement de l'angle α mais aussi, dans une grande mesure, des autres paramètres.

Il n'est donc pas étonnant que K. et J. HRUBAN [36] au cours de leur vérification de la méthode de BORICHANSKI sur les poutres avec des consoles, représentées sur la figure 6-30, aient constaté que cette méthode donnait des valeurs trop élevées, par exemple pour la poutre du type B de 11,3 % et pour la poutre du type C de 44,6 %.

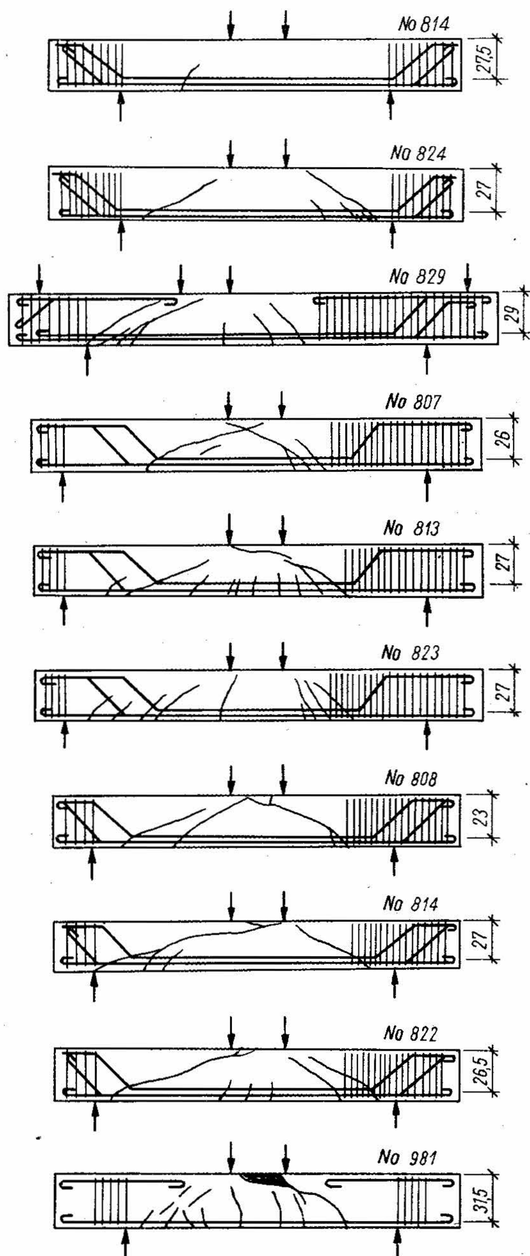


Fig. 6-29. Poutres dans les essais de BORICHANSKI

La formule de BORICHANSKI a été contrôlée également par IZOTOV [41] sur la base de ses essais personnels et en utilisant les essais américains de MORETTO et CLARK. Les valeurs de V_b trouvées dans les essais de IZOTOV étaient également plus petites que celles de BORICHANSKI, mais les différences observées n'étaient pas si considérables que dans le cas des

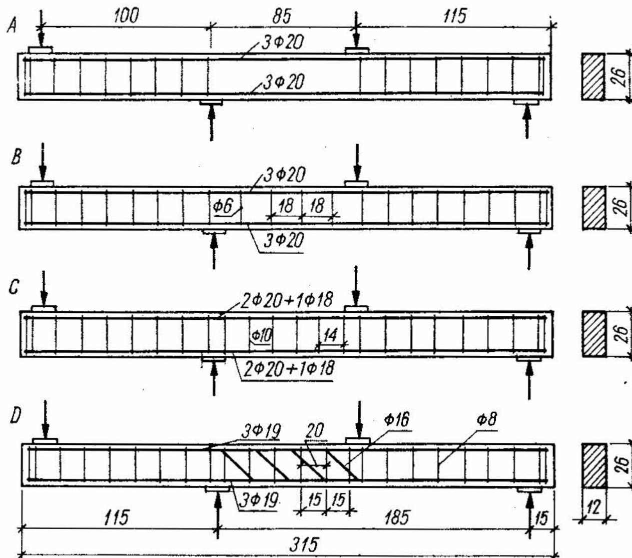


Fig. 6-30. Poutres à console dans les essais de K. et J. HRUBAN

essais [36]. Cela était dû aux conditions favorables des expériences effectuées sur les poutres de petites dimensions ($l \approx 220$ cm) avec un élancement de cisaillement relativement peu élevé. La comparaison des résultats et la formulation des conclusions est plus difficile parce qu'une partie des poutres examinées par IZOTOV était munie d'armatures soudées.

Il est à remarquer en outre que ni BORICHANSKI, ni K. et J. HRUBAN, ni enfin IZOTOV, n'ont considéré cette partie de l'effort tranchant V_a qui est transmise par les armatures longitudinales et, par conséquent, ils ont obtenu une valeur V_b artificiellement surestimée. La supposition $V_a = 0$ n'est justifiée que dans les cas où une fissure se manifeste au niveau des armatures principales (fig. 3-12), ce qui n'était pas observé dans les essais en question.

Dans le paragraphe 5.6 on a présenté les essais de JONES, WATSTEIN et MATHEY ainsi que ceux de KREFELD et THURSTON. Tous ces expérimentateurs ont constaté qu'une partie considérable de l'effort tranchant était transmise par les armatures longitudinales dans les zones comprimée et tendue. Par exemple, des essais de JONES de poutres munies de fissures artificielles obliques il résulte que dans la phase avant la rupture, dans une des poutres examinées, le béton transmettait 0,13 T, tandis que les barres tendues transmettaient 0,3 T (fig. 5-82). Il est vrai que les résultats des essais discutés en 5.6 doivent être traités

avec une certaine réserve, car le nombre des expériences et des paramètres considérés était insuffisant, et les fissures obliques artificielles perturbaient également les résultats. Néanmoins, on peut supposer sur la base de ces recherches que la participation de l'armature longitudinale dans la transmission de l'effort tranchant n'est pas toujours négligeable. Cela signifie que la différence de 44,6 % entre les valeurs de V_b calculée par la formule de BORICHANSKI et de V_b effective déduite des essais de K. et J. HRUBAN ne représente pas la limite supérieure de l'erreur.

GYENGÖ (paragraphe 4.2) détermine la valeur de V_b autrement, en supposant une inclinaison de 45° de la fissure oblique et en reliant la valeur limite de l'effort tranchant transmis par la zone comprimée du béton à la hauteur de cette zone et, en conséquence, indirectement aussi au moment fléchissant.

D'après GYENGÖ, une section transversale en béton en état de rupture peut transmettre, outre les contraintes $\sigma_x = \bar{\sigma}_b$, également des contraintes considérables de cisaillement τ. Dans cette méthode, la force V_b est la somme des contraintes de cisaillement appliquées au béton comprimé au-dessus de la fissure oblique, et elle dépend linéairement de la résultante des contraintes N_{bx}. Par conséquent, dans le cas où l'équilibre d'un élément est considéré séparément pour un effort oblique dû aux barres relevées et pour un effort vertical dû aux étriers, on peut déterminer d'une façon univoque les efforts N'_0 et N'_{ax} ou bien N'_{ay} et N'_{ax} d'après les trois conditions d'équilibre (fig. 4-5).

L'application simultanée des barres relevées et des étriers conduit à un système hyperstatique avec une valeur surabondante intérieure. Pour obtenir une solution univoque il faut donc, outre les trois équations statiques, utiliser une équation supplémentaire déduite par exemple d'une condition économique ou géométrique. Une telle correction a été introduite par VISY (paragraphe 4.3) à sa méthode en employant la condition économique du minimum de consommation d'acier pour l'armature.

Ces deux méthodes de VISY et de GYENGÖ, de même que la méthode de BORICHANSKI, ne donnent pas des résultats suffisamment conformes aux résultats expérimentaux pour des éléments en béton armé de forme arbitraire et soumis à différentes charges, car elles sont basées sur des hypothèses simplificatrices nécessaires pour les applications pratiques, mais plusieurs facteurs importants sont négligés. Les formules données ne sont donc valables que dans les étroites limites des paramètres déterminées par les types d'éprouvettes adoptés pour les essais.

GYENGÖ et VISY admettent que dans la zone dite comprimée

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_b, \quad \tau = 0{,}2\bar{\sigma}_b \quad \text{et} \quad \xi_{max} \leqslant 0{,}5 \text{ (fig. 4-6).}$$

Cette hypothèse n'est pas valable dans la zone où M et T sont appliqués simultanément, car il a été démontré aux paragraphes 4.5 et 6.2 que la rupture du béton intervenait pour $\sigma_x \leqslant \bar{\sigma}_b$ quand des valeurs élevées de τ sont admises. De plus, les fissures obliques arrivent plus haut que les fissures dues à la flexion et elles pénètrent dans la zone comprimée des contraintes σ_x.

La méthode de BAY est très originale (paragraphe 4.4) et diffère considérablement de celles qui sont employées le plus souvent. BAY ne considère pas l'état d'équilibre intérieur de la partie de poutre voisine de l'appui et séparée par une fissure oblique et il n'utilise pas

non plus le critère de résistance de MOHR. La valeur limite de l'effort tranchant transmis par la zone comprimée du béton est déterminée en supposant une analogie entre l'état de contrainte de cette zone et les contraintes dans un angle d'un quadrant du plan élastique chargé par des forces N_{bx} et V_b dirigées suivant ses côtés (fig. 4-10 et 4-11). Il est à présent difficile d'estimer l'utilité de cette méthode pour la pratique car aucune vérification expérimentale n'a été réalisée. Toutefois, certaines hypothèses de BAY semblent être contestables. Dans une de ses simplifications fondamentales BAY a supposé que la contrainte calculée pour le côté vertical du quadrant élastique chargé à l'angle par une force $N_{bx\,max}$ ou bien par des forces N_{bx} et V_b (fig. 6-31) correspond approximativement à la contrainte dans la

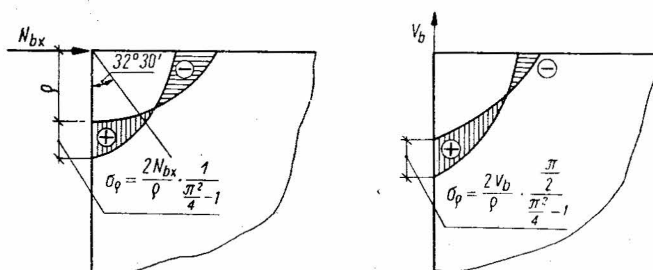


Fig. 6-31. Contraintes à l'angle d'un quadrant d'un plan élastique soumis aux efforts N_{bx} et V_b

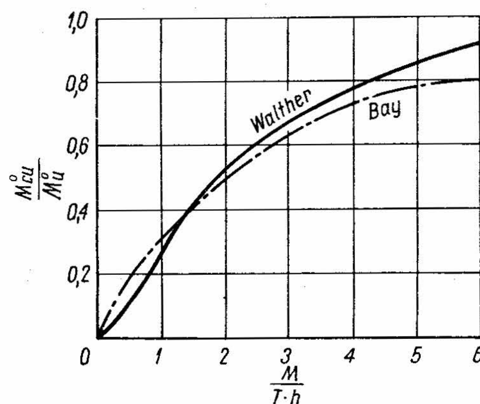


Fig. 6-32. Influence de l'élancement de cisaillement sur la valeur du rapport entre le moment de rupture par cisaillement et le moment de rupture par flexion

section perpendiculaire à la face comprimée de la poutre en béton armé. Cette supposition implique que les forces appliquées à l'angle du quadrant élastique produisent les contraintes σ_ϱ sur le côté vertical, d'où BAY a formulé l'équation suivante (4.36)

$$\frac{2N_{bx\,max}}{\varrho}\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}-1}=\frac{2N_{bx}}{\varrho}\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}-1}+\frac{2V_b}{\varrho}\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}-1}.$$

Cependant, si l'on considère l'état effectif, où N_{bx} est appliqué au centre de gravité des contraintes σ_x, les contraintes de tension σ_ϱ dues à la résultante de $N_{bx\,max}$ et N_{bx} sont nulles. Cela signifie que le côté gauche de la formule (4.36) est égal à zéro et le côté droit est différent de zéro $\left(\text{pour } N_{bx} < N_{bx\,max} \text{ on a } \frac{2V_b}{\varrho}\cdot\frac{\pi/2}{\pi^2/4-1}\neq 0\right)$, donc le signe d'égalité n'est pas valable. Malgré des hypothèses simplificatrices très avancées, la méthode de BAY donne dans certains cas des résultats proches des données expérimentales et des résultats de la théorie de la capacité portante de WALTHER, qui est basée sur des hypothèses plus générales (paragraphe 4.5). La concordance avec cette dernière est représentée sur la figure 6-32.

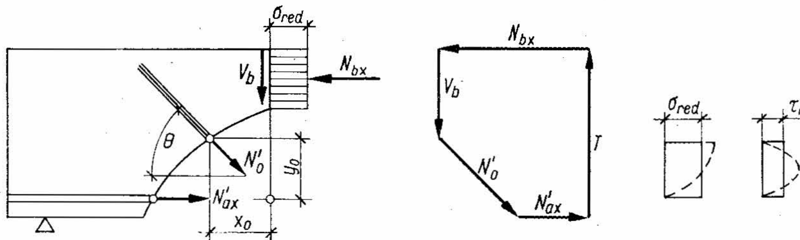


Fig. 6-33. Schéma des efforts intérieurs dans la zone de cisaillement, d'après ERDI

Parmi toutes les théories d'état limite ultime de la zone de cisaillement présentées dans le chapitre 4 on peut indiquer la théorie de WALTHER comme étant la plus générale et très utile pour les applications pratiques. Son avantage est le passage continu entre la rupture par flexion et la rupture par cisaillement. Cette théorie n'englobe pas la rupture produite par l'écrasement du béton dans la nervure par suite des valeurs élevées des contraintes principales de compression.

La méthode de GOSCHY-BALÁZS, présentée au paragraphe 4.6, a une importance plutôt théorique, et son application pratique ne peut pas être prévue. Par contre, la méthode de KANI, présentée au paragraphe 4.7, a des avantages pratiques, quoique l'analyse de la résistance de la zone de cisaillement soit réalisée d'une façon très originale, de même que dans la méthode de BAY.

Dans cette revue des théories de la capacité portante il faut mentionner également la méthode de ERDI [19] (fig. 6-33). Elle est proche de la méthode de GYENGÖ (paragraphe 4.2) avec cette différence que ERDI réduit les contraintes maximales normales dans la zone de cisaillement en considérant l'application simultanée des contraintes σ_x et τ_{xy}. La valeur de la contrainte réduite est donnée par ERDI par la formule

$$\sigma_{red}=\omega K'\sigma_{cyl}, \tag{6.3}$$

et les valeurs des contraintes limites de cisaillement par la formule

$$\tau_n = \frac{\sigma_{red}}{\beta} = \frac{\omega K' \sigma_{cyl}}{\beta}, \tag{6.4}$$

où : $\omega = 0{,}8$ est le coefficient déduit du remplacement du diagramme parabolique des contraintes σ_x par un diagramme rectangulaire,

$K' = 0{,}815$, un coefficient de réduction de la valeur maximale des contraintes normales à cause des contraintes de cisaillement dans les mêmes sections transversales,

$\beta = 5$ à 6, un coefficient numérique.

De cette façon, pour les bétons faibles et moyens, nous obtenons d'après ERDI une valeur

$$\tau_n = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}815 \cdot \bar{\sigma}_b}{6} \approx 0{,}11\bar{\sigma}_b \; ; \; \sigma_{cyl} \approx \bar{\sigma}_b,$$

au lieu de $0{,}2\bar{\sigma}_b$ d'après GYENGÖ et VISY.

Dans le chapitre 4 plusieurs autres théories et méthodes proposées n'ont pas été présentées, par exemple les théories intéressantes de PALOTAS [65] et de JÄGER [38] basées comme celle de WALTHER sur le critère de résistance de MOHR. La figure 6-34 montre la répartition des contraintes normales et tangentes dans une section de rupture d'après PALOTAS.

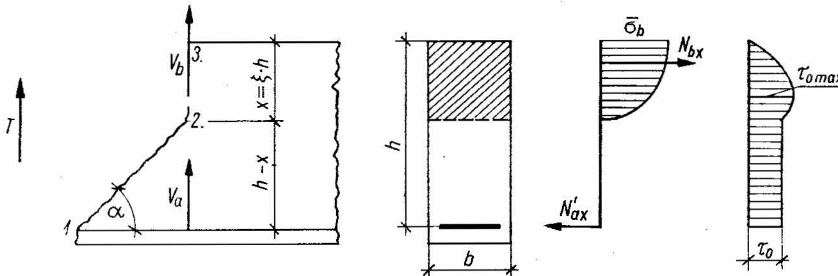


Fig. 6-34. Répartition des contraintes dans la section transversale passant par l'extrémité de la fissure oblique, d'après PALOTAS [65]

Pour compléter l'exposé sur les méthodes de la capacité portante il est utile d'indiquer ici également quelques formules empiriques les plus importantes, proposées par les chercheurs américains. Ces formules permettent de calculer les valeurs des moments de rupture par cisaillement ou des moments de fissuration ; les formules sont données pour les valeurs réduites des moments m_{cu} ou m_F.

MORETTO [61]:

$$m_{cu} = \frac{0{,}875a}{h\sigma_{cyl}} (K\bar{\omega}_v Q'_{ae} + 0{,}1\sigma_{cyl} + 350\bar{\omega}), \tag{6.5}$$

où K est un coefficient expérimental.

CLARK [16]:

$$m_{cu} = 430\frac{\overline{\omega}a}{\sigma_{cyl}h} + 0{,}105 + 153\frac{a}{\sigma_{cyl}h}\sqrt{\overline{\omega}_v}, \tag{6.6}$$

LAUPA, SIESS, NEWMARK [48]:

$$m_{cu} = \xi\left(0{,}57 - \frac{6{,}4\cdot\sigma_{cyl}}{10^4}\right)\left(1 + \frac{\overline{\omega}_v Q'_{ae}}{35}\right), \tag{6.7}$$

où $\xi = \frac{x}{h} = \sqrt{(\overline{\omega}n)^2 + 2\overline{\omega}n} - \overline{\omega}n$;

les valeurs de n peuvent être tirées de la formule de JANSEN [39] :

$$n = 5 + \frac{700}{\sigma_{cyl}},$$

JONES [40]:

$$m_{cu} = \xi\left(0{,}79 - \frac{1{,}39}{10^3}\sigma_{cyl} + \frac{8{,}18}{10^7}\sigma_{cyl}^2\right)\left(1 + \frac{\overline{\omega}_v Q'_{ae}}{35}\right); \tag{6.8}$$

MORROW-VIEST [62]:

$$m_F = \frac{0{,}875a}{\sqrt{\sigma_{cyl}}h}\left(0{,}378 + \frac{10{,}06}{a'_F\frac{1}{n\overline{\omega}h} + 10}\right)^{*)}, \tag{6.9}$$

où a'_F est la distance entre le début de la fissure oblique et l'appui;
WHITNEY [84]:

$$m_F = \frac{0{,}875a}{\sigma_{cyl}h}\left(3{,}57 + 0{,}26\frac{M_u^0}{bh^2}\sqrt{\frac{h}{a'}}\right)^{*)}, \tag{6.10}$$

où M_u^0 est le moment fléchissant ultime de calcul,
a', la distance entre le bord du poteau et l'appui (fig. 5-75);
BRESLER-PISTER [14]:

$$m_{cu} = \frac{0{,}1ak_x}{h}\left[0{,}62 + 7{,}86\left(\frac{\sigma_{red}}{\sigma_{cyl}}\right) - 8{,}46\left(\frac{\sigma_{red}}{\sigma_{cyl}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{6.11}$$

où $k_x \approx \frac{Q'_a}{\sigma_{red}}\overline{\omega}$,

tandis que σ_{red} pour $\sigma_{cyl} > 210$ kgf/cm² peut être calculé par la formule de HOGNESTAD:

$$\sigma_{red} = \frac{274 + 0{,}35\sigma_{cyl}}{235 + \sigma_{cyl}}\cdot\sigma_{cyl};$$

---

*) Les formules ont été établies pour les poutres sans armature transversale.

MOODY, VIEST, ELSTNER, HOGNESTAD [60]:

$$m_{cu} = \frac{\bar{\omega}\sigma_{zx}}{\sigma_{cyl}}\left(1-k_2\frac{\bar{\omega}\sigma_z}{k_1 k_3 \sigma_{cyl}}\right)+\frac{N'_{ay}e'}{k_1 k_3 \sigma_{cyl}}, \tag{6.12}$$

où : k_1, k_2, k_3 sont des coefficients empiriques,
$k_2 = 0{,}42$,

$k_1 k_3 = 1{,}211-0{,}0485\frac{\sigma_{cyl}}{70{,}3}$ (relation valable pour $140\ \text{kgf/cm}^2 < \sigma_{cyl} < 420\ \text{kgf/cm}^2$),

σ_a sont les contraintes dans l'armature, déterminées approximativement par la formule :

$$\sigma_a = 0{,}729\left[6{,}9\cdot 10^{-4}E_a\left(-1+\sqrt{1+\frac{1450}{\bar{\omega}E_a\frac{1}{k_1 k_3 \sigma_{cyl}}}}\right)\right], \tag{6.13}$$

e' est la distance entre l'appui et la force N'_{ay}.

Toutes les formules empiriques présentées ci-dessus ont été proposées sous des formes un peu différentes par leurs auteurs et elles permettaient de déterminer directement les valeurs limites de l'effort tranchant ou du moment fléchissant, ou bien dans le cas de la théorie classique, de calculer les valeurs des contraintes maximales de cisaillement de fissuration et de rupture. Ces formules ont été transformées ici pour exprimer les valeurs des moments réduits*)

$$m = \frac{M}{bh^2\sigma_{cyl}}$$

et pour pouvoir ainsi comparer facilement les résultats calculés.

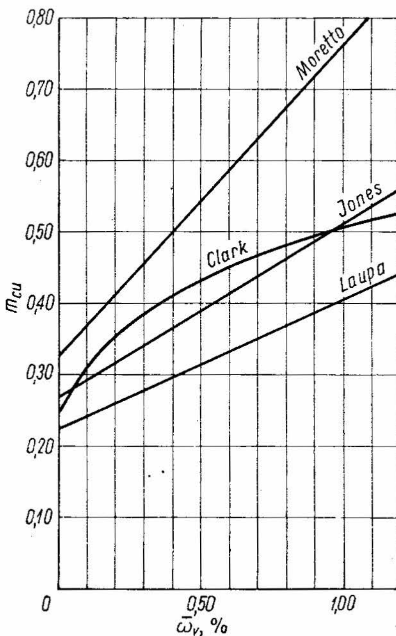


Fig. 6-35. Influence de l'aire relative de l'armature transversale sur les valeurs du moment réduit de cisaillement

Les diagrammes de la figure 6-35 représentent l'influence de la section relative des étriers verticaux sur le moment réduit de rupture par cisaillement calculé d'après les formules de MORETTO, JONES, CLARK et LAUPA. Nous voyons que les divergences sont considérables à partir même de $\bar{\omega}_v = 0$. Les valeurs maximales de m_{cu} sont obtenues par la formule de MORETTO (6.5) établie pour des poutres munies d'étriers soudés aux barres de l'armature principale. CLARK a supposé une relation parabolique entre la section relative de l'armature transversale et le moment réduit de rupture par cisaillement m_{cu}; les trois autres chercheurs ont admis des relations linéaires.

*) Les formules (6.5) à (6.12) ont été données dans l'ouvrage de HAUGLI (DAfSt, cahier 145).

CLARK, comme d'ailleurs MORETTO, BORICHANSKI, MOODY et autres, ne tient pas compte de l'influence positive des étriers sur la résistance de la zone comprimée du béton, cela étant en contradiction avec les résultats des essais analysés au chapitre 5. Par conséquent, il est incorrect, d'après l'auteur, de dimensionner les étriers en se basant sur les formules déduites exclusivement des contraintes mesurées dans les étriers. D'une façon indirecte l'influence des étriers sur la capacité portante a été considérée par JONES et LAUPA dans leurs formules.

Nous avons déjà pu constater sur les figures 6-1, 6-2 et 6-3 au début de ce chapitre que la dispersion des courbes déduites des formules (6.5) à (6.12) est même plus importante que celle montrée par la figure 6-35. Cette dispersion est produite par le fait que les chercheurs particuliers ont réalisé leurs expériences sur des poutres différentes, avec des armatures longitudinales et transversales différentes, et soumises à des charges différentes. En conséquence, chaque formule donne des résultats corrects, mais leur application doit être limitée aux cas où les éléments seront voisins de ceux qui ont servi de base pour l'établissement des formules en question, au moins en ce qui concerne leurs forme, armature et mode de mise en charge.

Les poutres examinées par MORETTO ont été représentées sur la figure 5-55, et les poutres de MORROW-VIEST, sur la figure 5-75. Les autres poutres essayées par les auteurs des formules (6.5) à (6.12) sont représentées sur la figure 6-36.

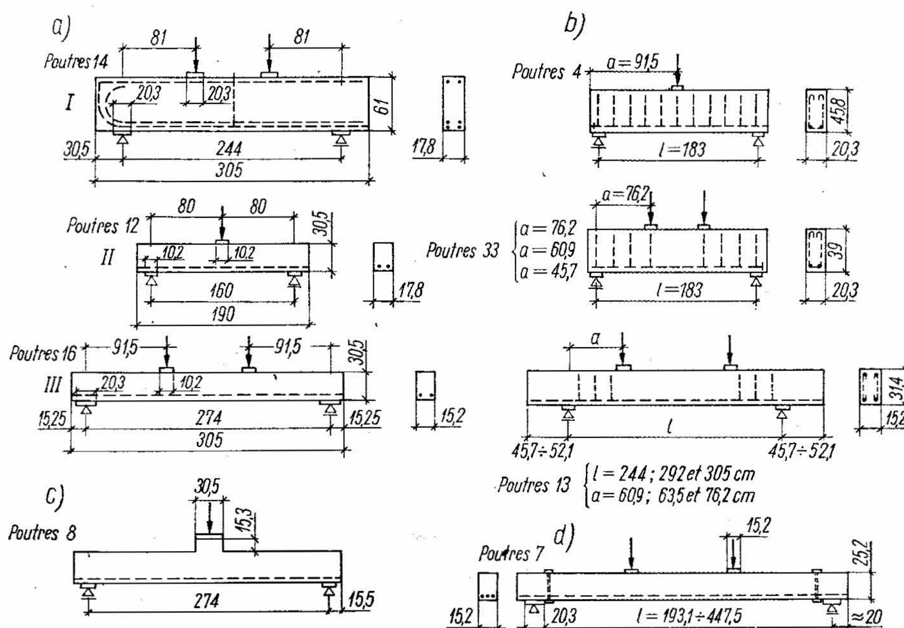


Fig. 6-36. Poutres en béton armé examinées dans les essais américains: a) poutres étudiées par MOODY, VIEST, ELSTNER et HOGNESTAD, b) poutres étudiées par CLARK, c) poutres étudiées par LAUPA, SIESS et NEWMARK, d) poutres étudiées par FELDMANN et SIESS

En résumant toutes ces considérations sur les méthodes de calcul de la capacité portante de la zone de cisaillement, on peut constater que malgré un nombre considérable d'ouvrages publiés par des théoriciens et par des expérimentateurs on n'a pas réussi à créer une théorie généralement valable et utile pour les besoins pratiques. Même la théorie de WALTHER, qui peut être considérée comme la plus juste parmi toutes celles qui ont été proposées jusqu'à maintenant, n'est pas générale. Probablement, nous devrons bien longtemps encore employer des méthodes de validité limitée et basées sur des hypothèses simplificatrices très fortes. Malgré cette critique des méthodes présentées du calcul de la capacité portante, il faut remarquer qu'on peut les employer utilement dans la pratique après avoir introduit plusieurs coefficients et conditions, et que les résultats ainsi obtenus seront dans de nombreux cas proches des valeurs effectives. Selon l'opinion de l'auteur, il est également possible de rendre la méthode classique de MÖRSCH plus utile dans la pratique en y introduisant quelques améliorations ; elle peut même devenir meilleure que certaines méthodes d'état limite, souvent très compliquées.

Sur la base de la présente revue des méthodes proposées on peut constater que le problème reste insoluble par les méthodes théoriques, même en y formulant le mécanisme de rupture d'une façon exacte. Cela est lié principalement au fait que le béton est un matériau hétérogène, dont les propriétés à la compression et à la traction sont très différentes. La diversité des armatures, les conditions variables d'adhérence et l'état complexe de contraintes produit par la fissuration, créent des difficultés supplémentaires. En ces circonstances, les études du problème du cisaillement resteront encore, pendant un laps de temps difficile à déterminer, du domaine semi-empirique.

6.5. SECTION TRANSVERSALE MINIMALE D'UNE POUTRE EN BÉTON ARMÉ RELATIVEMENT AUX CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

Le problème posé a été discuté au paragraphe 5.5 sur la base de certaines recherches américaines, françaises et allemandes. Nous allons considérer maintenant la possibilité des applications pratiques des résultats des études expérimentales afin de pouvoir éventuellement corriger les prescriptions réglementaires dans ce domaine. Les règlements en vigueur dans la plupart des pays européens exigent une augmentation de la section transversale quand la valeur de τ_0 calculée par la formule de MÖRSCH $\tau_0 = \frac{T}{b_0 z}$ dépasse la résistance du béton à la traction. Cette condition doit permettre d'éviter des fissures obliques. En réalité cependant, les fissures obliques peuvent s'ouvrir beaucoup plus tôt, à cause des contraintes σ_2 dont la valeur absolue est égale au moins à τ_0 (fig. 5-81). D'après les essais de MCHENRY (fig. 6-5) les contraintes $\sigma'_{b max}$ peuvent être réduites ainsi jusqu'à la valeur de $0,9\sigma'$. Si l'on considère, sur la base des autres essais indiqués par la figure 6-6, cette réduction comme trop grande en y mettant le coefficient 1,0 à la place de 0,9, les contraintes dues au retrait et souvent négligées s'ajoutent et accélèrent l'ouverture des fissures obliques. De toute façon, les fissures obliques s'ouvrent sous des contraintes τ_0 souvent beaucoup plus petites que σ'. Il y a donc une question qui se pose : cette condition ne

doit-elle pas être supprimée dans les règlements et remplacée par une condition de l'ouverture admissible d'une fissure oblique ? Dans ce cas la valeur de $\tau^1_{0\,max}$ serait très augmentée.

Cette voie a été choisie dans le règlement pour les projets des structures en béton et en béton armé [87] préparé en 1963 en U.R.S.S. et destiné aux pays du C.A.E.M.*⁾ La valeur de T^k_{max} dans ce règlement est deux fois plus élevée que la valeur indiquée par DIN 1045 ; elle peut être calculée par la formule (5.11) donnée au chapitre 5

$$T^k_{max} = 0{,}25\sigma^0_b bh,$$

où σ^0_b désigne la résistance de calcul du béton, égale au produit de la résistance réglementaire par les coefficients dits de condition d'exploitation.

Des les expériences présentées au chapitre 5 il résulte que la valeur T^k_{max} dépend non seulement des dimensions de la section transversale de l'élément et de la qualité du béton, mais également du volume et de la nature de l'armature transversale, du volume de l'armature longitudinale, de l'élancement de cisaillement, de la forme des sections transversales, du mode de charge et d'autres nombreux facteurs. Sans doute la capacité portante de la zone de cisaillement dépend essentiellement du volume et de la nature de l'armature transversale. En conséquence, à mesure qu'on augmente la valeur de T^k_{max} on se rapproche forcément de l'armature correspondant à 100 % de cisaillement, conformément aux indications de MÖRSCH. Il est cependant à rappeler que l'accroissement de la capacité portante d'un élément dans la zone d'action simultanée de T et M n'est pas proportionnel au volume de l'armature transversale, cela étant prouvé par les essais américains effectués dans les années 20 (chapitre 5.3.2, fig. 5-44) et confirmés ultérieurement par les essais de LEONHARDT et WALTHER (fig. 5-58). En considérant le rôle de l'armature transversale il faut également tenir compte du fait que la capacité portante dépend dans une large mesure du nombre d'armatures longitudinales. Ces barres, arrêtées conformément au diagramme des moments fléchissants, diminuent la capacité portante de la zone de cisaillement. Ce phénomène a été bien compris par MÖRSCH qui a recommandé de conduire au moins 1/3 des armatures principales jusqu'à l'appui. L'influence du nombre et de l'adhérence des barres principales au béton sur la capacité portante de la zone de cisaillement a été considérée ou même un peu surestimée par DOROCHKIEVITCH [18], qui lui a subordonné la valeur V_b

$$V_b = \tau_{crit} z p_a, \tag{6.14}$$

où τ_{crit} est une valeur déterminée expérimentalement, égale à 14 kgf/cm² pour des barres lisses et égale à 19 kgf/cm² pour des barres crénelées dans le cas de $\sigma_{wu} = 100$ kgf/cm² ; p_a désigne le périmètre d'une barre de l'armature principale ; z est le bras de levier du couple des forces élastiques. D'après DOROCHKIEVITCH, l'augmentation de la résistance du béton de 50 kgf/cm² correspond à un accroissement de τ_{crit} de 1 kgf/cm².

Le parti de DOROCHKIEVITCH est basé, bien entendu, sur une simplification poussée du problème, et dans cette méthode plusieurs facteurs importants mentionnés au chapitre

*⁾ Conseil d'Assistance Economique Mutuelle.

5 sont négligés. Par conséquent, cette méthode, de même que les autres, ne peut pas être considérée comme générale, bien que, conformément à la vérification réalisée dans l'ouvrage [18], dans certains cas elle donne des valeurs proches des valeurs effectives.

Les diagrammes de la figure 6-37 représentent la relation entre la capacité portante relativement au cisaillement et la section relative de l'armature longitudinale, d'après les essais de MOODY [59] et de LOENHARDT et WALTHER [51]. Les divergences relativement importantes dans les résultats obtenus sont dues non seulement aux valeurs différentes du rapport $\frac{M}{Th}$ mais également aux différences dans les dimensions et les formes des éléments étudiés.

Il résulte des essais américains effectués dans les années 20 [77] et des études plus récentes de LEONHARDT et WALTHER que, dans les poutres en forme de T, l'accroissement de la force de rupture P_u produit par une augmentation de la largeur b_0 de la nervure était moins rapide que cette augmentation imposée par le programme d'essai (fig. 6-38). Cela

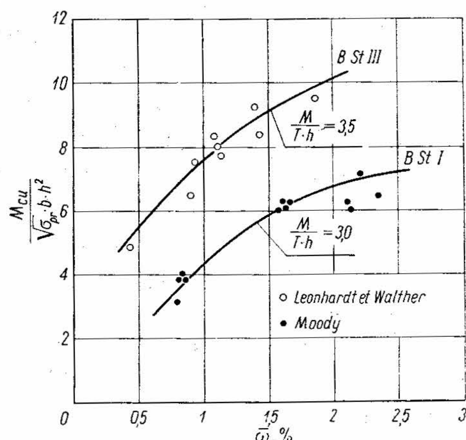


Fig. 6-37. Capacité portante au cisaillement en fonction de l'aire relative de l'armature longitudinale d'après les essais de LEONHARDT et WALTHER et les essais de MOODY

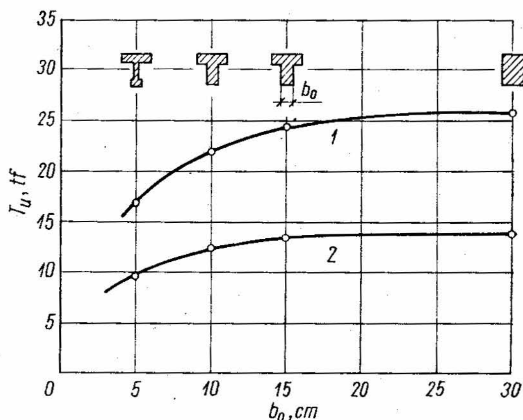


Fig. 6-38. Influence de la largeur de la nervure sur la valeur de l'effort tranchant de rupture (LEONHARDT et WALTHER)

1 — poutres sous une charge uniforme 2 — poutres sous une charge constituée par deux forces concentrées

indique que dans les sections minces en T les valeurs de $\tau^1_{0\,max}$ peuvent dépasser de 20 % les valeurs correspondantes dans les sections rectangulaires. L'augmentation de $\tau^1_{0\,max}$ est ici justifiée par la participation du hourdis. En conséquence, une jonction convenable doit être assurée entre la nervure et le hourdis. La meilleure méthode consiste dans l'introduction des étriers dans le hourdis ou dans le soudage des étriers aux barres du hourdis situées perpendiculairement à l'axe de la nervure.

Les figures 6-39, 6-40 et 6-41 montrent les valeurs de T^k_{max} d'après le règlement polonais en vigueur PN-56/B-03260 et le règlement du C.A.E.M.*) comparées avec les résultats

*) Conseil d'Assistance Economique Mutuelle.

des essais de CLARK. On voit que toutes les valeurs de T^k_{max} calculées selon le règlement polonais sont très inférieures aux valeurs de T_u trouvées par CLARK. Par contre, un nombre élevé de résultats expérimentaux se trouve au-dessous des valeurs de T^k_{max} indiquées par le règlement du C.A.E.M. Cela indique que dans ces cas la rupture des poutres correspondait à un effort tranchant plus petit que celui calculé d'après ce dernier règlement. Les valeurs de T^k_{max} données par le règlement du C.A.E.M. n'étaient dépassées par les valeurs expérimentales de l'effort tranchant de rupture que dans le cas d'armatures transversales et longitudinales fortes, les armatures longitudinales dans les essais de CLARK étant amenées jusqu'à l'appui sans réduction. Si, au surplus, nous considérons le fait que CLARK a étudié des poutres relativement petites dont l'élancement de cisaillement était peu élevé et qu'il s'agissait d'essais de courte durée, on doit formuler la conclusion que la valeur de T^k_{max} indiquée par le règlement du C.A.E.M. ne peut pas être appliquée d'une façon générale avec la seule limitation que les ouvertures des fisssures obliques ne doivent pas dépasser des valeurs définies. Nous ne savons pas, cependant, calculer ces ouvertures. Les valeurs de T^k_{max} d'après DIN 1045 sont du même ordre de grandeur que celles indiquées par les figures 6-39 et 6-40 d'après le règlement polonais.

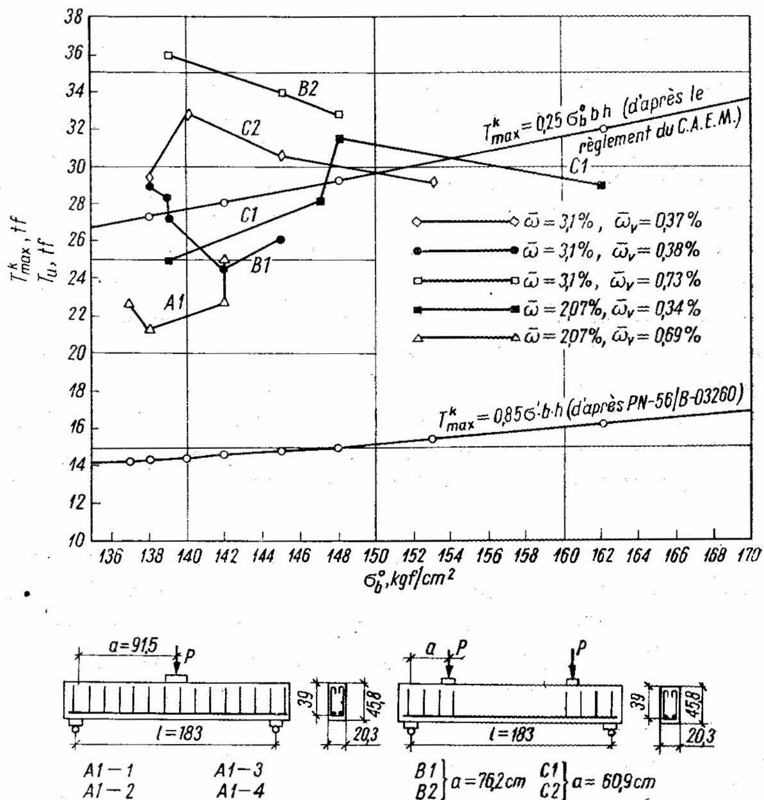


Fig. 6-39. Valeur de T^k_{max} d'après le règlement polonais PN-56/B-03260 et le règlement du C.A.E.M. comparée avec les résultats des essais de CLARK

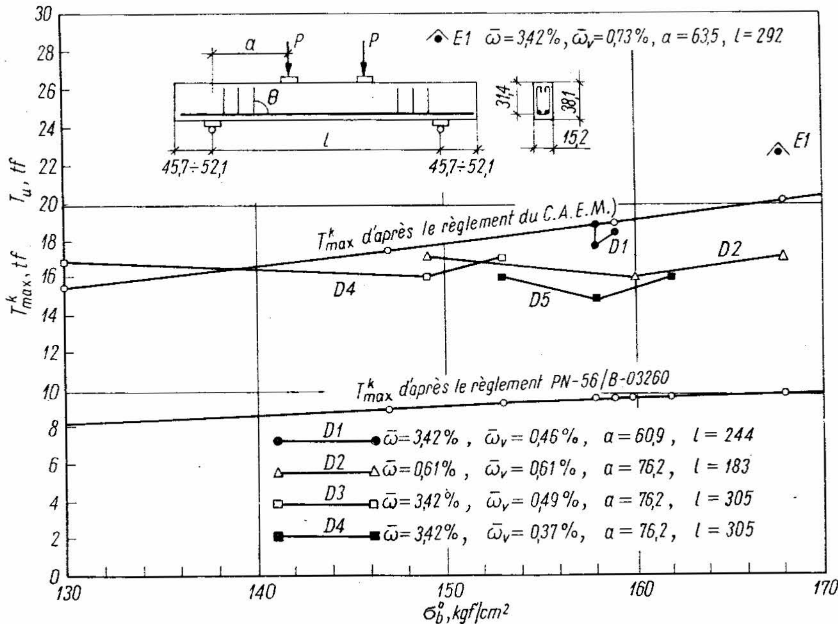


Fig. 6-40. Valeur de T_{max}^k d'après le règlement polonais PN-56/B-03260 et le règlement du C.A.E.M. comparée avec les résultats des essais de CLARK

L'analyse de la formule de T_{max}^k, d'après le règlement du C.A.E.M., eu égard aux résultats expérimentaux, permet de constater que l'augmentation de valeur de T_{max}^k par rapport à la méthode classique est justifiée. Toutefois, une augmentation de T_{max}^k tellement importante exige de tenir compte non seulement des relations entre ces valeurs et la résistance du béton ou les dimensions de la section, mais aussi du pourcentage de cisaillement transmis par l'armature transversale et, éventuellement, par l'armature longitudinale, ainsi que de l'élancement de cisaillement et de la forme de la section. Si l'on néglige ces facteurs, on peut rencontrer dans certains cas un épuisement brusque de la capacité portante et, au surplus, sans avertissements préalables. Ce danger n'existerait pas si l'on suivait les règlements actuels PN-56/B-03260 et DIN 1045, rédigés avec des marges de sécurité importantes.

Afin de réaliser un dimensionnement plus rationnel des éléments en béton armé relativement au cisaillement en conservant la sécurité indispensable, les projets d'une rédaction nouvelle des règlements DIN 1045 et DIN 4224 publiés en 1968 proposent d'admettre un schéma fictif du treillis classique à inclinaison variable des bielles comprimées. Un tel treillis permet de tenir compte d'un angle inférieur à 45° en réduisant la valeur de calcul des contraintes de cisaillement τ_{red}.

Dans les éléments fléchis la contrainte de cisaillement τ_0 calculée pour la phase *II* représente la valeur de calcul. Dans les éléments minces $\left(\frac{l}{h} > 8\right)$ de hauteur utile variable, soumis à un moment et à un effort longitudinal, la valeur de calcul des contraintes de

cisaillement dans la zone située entre l'axe neutre et l'armature tendue est déterminée d'après la formule suivante

$$\tau_0 = \frac{T_{red}}{b_{0\,min} z}, \tag{6.15}$$

où :

$$T_{red} = T - \frac{M_e}{z}\,\mathrm{tg}\gamma = T - \frac{M_e}{h}\,\mathrm{tg}\alpha \tag{6.15a}$$

et

$$M_e = M - N y_e, \tag{6.15b}$$

N exprime la compression, d'où le signe moins.
Les autres grandeurs dans les formules (6.15) sont indiquées sur la figure 6-42.

Dans les poutres courtes $\left(\frac{l}{h} \leqslant 8\right)$ soumises à une charge uniformément répartie, ou bien pour $\frac{a}{h} \leqslant 2\,h$ sous des charges concentrées, on peut, conformément à DIN 1045 p. 17.3.1.1., employer la valeur kT pour le calcul, avec

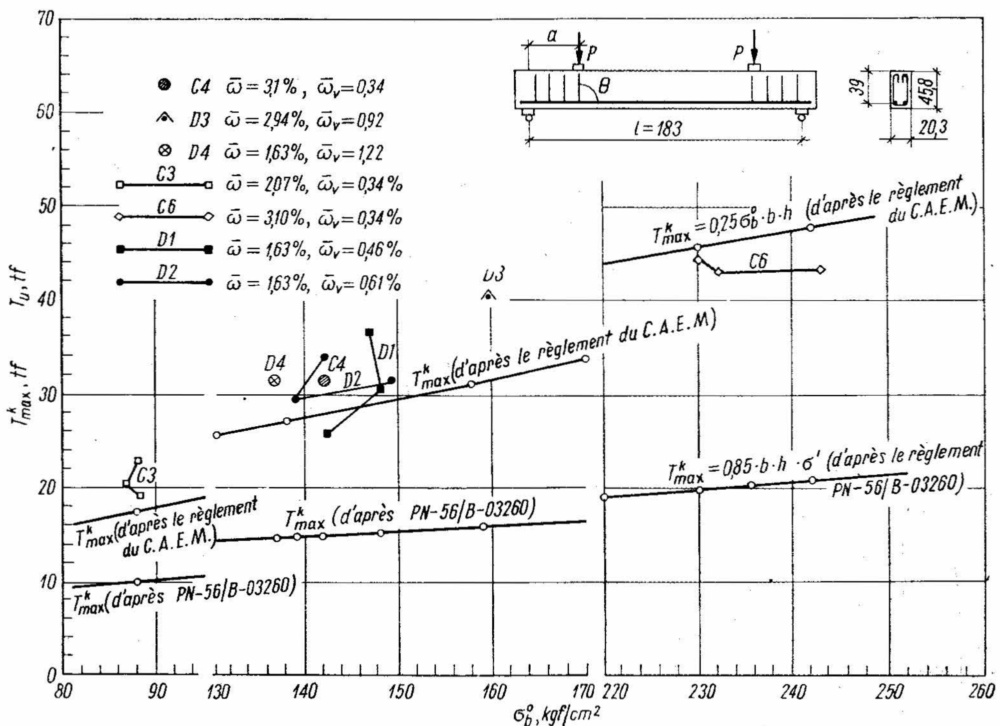


Fig. 6-41. Valeur de T^k_{max} d'après le règlement polonais PN-56/B-03260 et le règlement du C.A.E.M. comparée avec les résultats des essais de CLARK

$$k = \frac{l}{8h}, \text{ dans le cas d'une charge répartie,}$$

$$k = \frac{a}{2h}, \text{ dans le cas d'une charge concentrée.}$$

Dans les cas d'un appui indirect ou d'une charge indirecte par des forces concentrées il faut remplacer le coefficient k par

$$\frac{1+k}{2}.$$

Si l'on doit employer la valeur de calcul des contraintes de cisaillement dans la zone comprimée, les contraintes principales de traction seront calculées par la formule

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{0a}^2}, \tag{6.16}$$

où :

$$\tau_{0a} = \frac{T_{red} S_a}{b_a I_{II}}, \tag{6.17}$$

I_{II} désignant le moment d'inertie dans la phase *II*.

Dans le cas d'une section en forme de T avec des membrures supérieure et inférieure fortes et une âme mince (fig. 6-43), il suffit d'appliquer la formule approximative suivante

$$\tau_0 = \frac{T_{red}}{A_{\hat{a}me}}, \tag{6.18}$$

$$A_{\hat{a}me} = b_0\left(d_0 - \frac{d+d_u}{2}\right), \tag{6.19}$$

$$T_{red} = T + N\left(\text{tg}\gamma_u + \frac{y_u}{z}\cdot\text{tg}\gamma\right) - \frac{M}{z}\text{tg}\gamma; \tag{6.20}$$

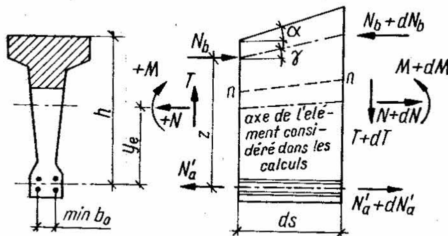


Fig. 6-42. Efforts et moments appliqués à un élément différentiel de la zone d'appui de la poutre

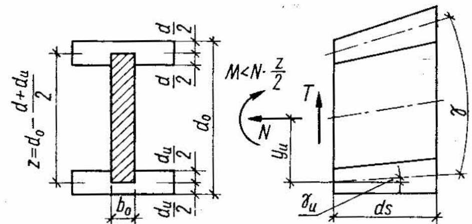


Fig. 6-43. Efforts et moments appliqués à un élément différentiel de la zone d'appui de la poutre en forme de double T

N est muni du signe négatif, comme précédemment.

Pour déterminer les contraintes principales de traction σ_1 on peut employer la formule (6.16) en y portant les valeurs calculées de $\sigma_{x\,min}$ dans l'âme pour la phase I supposée.

Dans les éléments soumis à la flexion et à la traction on peut négliger l'influence de l'effort de traction quand la ligne des contraintes nulles, calculée pour la phase II, reste à l'intérieur de la section. Si cette ligne sort de la section, les contraintes principales de traction doivent être calculées dans la phase I pour le centre de gravité de la section. La valeur de σ_1 ainsi déterminée doit être considérée comme la valeur de calcul de τ_0, qui ne peut pas dépasser les limites imposées du tableau 6-2 pour les contraintes de cisaillement. En ce qui concerne l'armature transversale dans la section soumise à un effort de traction N, celui-ci est négligé, et l'armature transversale est calculée pour pouvoir transmettre la contrainte tangente déduite de l'effort tranchant T.

Pour la contrainte τ_0, déterminée par les procédés décrits ci-dessus, les valeurs limites sont indiquées dans le tableau 6-2 où les zones définies correspondent aux divers types d'armature transversale.

TABLEAU 6-2

Valeurs limites des contraintes de cisaillement τ_0 *en* kgf/cm^2 *sous la charge de service*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Type d'élément	Zone	Contrainte τ_0	Valeurs limites des contraintes de cisaillement en fonction de la résistance σ^0_{cyl} du béton					Remarques sur la nécessité d'une armature transversale	Armature transversale
				150	250	350	450	550		
1	Dalles	1	$\leqslant \tau_{011}$	4	5	6	7	8	inutile	sans armature transversale
2	Dalles	2	$\leqslant \tau_{02}$	12	18	24	30	36	utile	armature transversale réduite
3	Poutres	1	$\leqslant \tau_{012}$	6	8	9	10	11	inutile	armature dite de construction
4	Poutres	2	$\leqslant \tau_{02}$	12	18	24	30	36	utile	armature transversale réduite
5	Poutres	3	$\leqslant \tau_{03}$	20	30	40	50	60	utile	armature transversale complète (l'armature en acier crénelé n'est admissible que pour $h_t \geqslant 45$ cm)

Dans la zone 2 (pour les dalles $\tau_{011} < \tau_0 \leqslant \tau_{02}$ et pour les poutres $\tau_{012} < \tau_0 < \tau_{02}$), la valeur de calcul τ_0 peut être diminuée pour le dimensionnement de l'armature transversale jusqu'à la valeur τ selon la formule

$$\tau = \frac{\tau_0^2}{\tau_{02}}. \tag{6.21}$$

Cette réduction ne peut pas être admise dans les sections soumises à une traction avec excentricité où la section totale est tendue.

Dans la zone 3 ($\tau_{02} < \tau_0 \leqslant \tau_{03}$) il faut calculer l'armature en considérant $\tau = \tau_0$, c'est-à-dire il faut prévoir l'armature complète transversale ($\eta = 1{,}0$).

Dans les zones 2 et 3 (tableau 6-2) l'effort de traction N_a' corespondant à l'unité de longueur de la poutre doit être calculé, d'après l'ouvrage [89], à partir du schéma indiqué sur la figure 6-44.

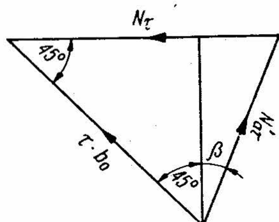


Fig. 6-44. Disposition approximative des efforts près de l'axe neutre dans la zone d'appui

$$N_a' = \frac{\tau b_0}{\sqrt{2}\cos\beta}. \tag{6.22}$$

Par conséquent, pour les étriers verticaux nous obtiendrons

$$N_v = \tau \cdot b_0. \tag{6.23}$$

En considérant les efforts ainsi calculés nous devons calculer l'armature transversale avec la condition

$$\sigma_a^1 < 2400 \text{ kgf/cm}^2.$$

6.6. MORPHOLOGIE DES FISSURES DANS LA ZONE DE CISAILLEMENT

Il découle des données expérimentales présentées au chapitre 5 que les dimensions d'une poutre, la forme de sa section, l'élancement de cisaillement, la nature de la charge et le type d'armatures transversale et longitudinale, influent ensemble d'une façon importante sur la morphologie des fissures. Chacun des cinq types d'épuisement de la capacité portante d'une poutre en béton armé (fig. 5-1 à 5-5) correspond à une répartition caractéristique des fissures, conformément au paragraphe 5.1. La valeur de la contrainte τ_{fu1} produisant la première fissure oblique dépend principalement de la résistance du béton, et l'armature transversale n'influe que très peu sur la valeur du moment fléchissant de fissuration dans la zone de cisaillement. Après l'ouverture des premières fissures obliques la situation est différente et l'armature transversale dans la phase *II* influe considérablement non seulement sur la capacité portante de la zone de cisaillement mais également sur la largeur et la longueur des fissures obliques, ainsi que partiellement sur leur forme. L'instant de l'ouverture de la première fissure oblique est difficile à observer à moins d'admettre la proposition de LEONHARDT et d'identifier cet instant avec un changement brusque des contraintes dans les étriers (fig. 5-62). Celui-ci est relativement facile à enregistrer dans les essais au laboratoire en utilisant un dispositif électronique de mesure.

Conformément à une tendance générale d'augmenter T^k_{max} le problème d'un calcul correct de l'ouverture des fissures obliques devient important. Il faut rappeler ici la formule de BORICHANSKI, admise dans le règlement du C.A.E.M. Pour établir cette formule BORICHANSKI s'est basé sur la relation connue

$$\sigma_a^N = \varepsilon_a E_a = \frac{f}{l_f} E_a. \tag{6.24}$$

En admettant un coefficient de correction Ψ_u pour les fissures obliques, nous obtiendrons

$$f_u = \frac{\sigma_a^N l_{fv}}{E_a} \Psi_u, \tag{6.25}$$

où : σ_a^N est la contrainte dans les armatures principales sous la charge réglementaire,
ε_a, la déformation unitaire de l'armature,
E_a, le module d'élasticité de l'acier,
f, l'ouverture de la fissure,
l_f, l'espacement des fissures dans un élément soumis à la traction axiale,
l_{fv}, l'espacement des fissures obliques.

Dans la théorie de MURACHEV [64] l'espacement des fissures dans un élément soumis à la traction axiale est

$$l_f = \frac{d_a \bar{\eta}}{4\bar{\omega}} \tag{6.26}$$

où $\bar{\eta}$ est un coefficient qui exprime l'adhérence de l'acier au béton.

L'espacement des fissures obliques n'est pas identique à l'espacement des fissures dans un élément soumis à la traction axiale. Par conséquent, BORICHANSKI a corrigé la formule (6.26) en augmentant l'espacement des fissures obliques de 33 % par rapport à l'élément sous tension axiale. L'influence des étriers et des barres relevées a été prise en considération par l'introduction dans la formule déterminant la valeur de l_{fv} de la somme algébrique des aires relatives de ces deux types d'armature transversale. Finalement, la formule (6.26) modifiée pour les fissures obliques prend la forme

$$l_{fv} = \frac{4}{3} \frac{d_a \bar{\eta}}{4\bar{\omega}} = \frac{1}{3\left(\dfrac{\bar{\omega}_v}{\eta_v d_v} + \dfrac{\bar{\omega}_0}{\eta_0 d_0}\right)} \leqslant h - 30 d_{v\,max} \tag{6.27}$$

où : d_a est le diamètre des armatures (en général),
d_v, le diamètre des étriers,
d_0, le diamètre des barres relevées,
$\bar{\omega}_v$, la section relative des étriers verticaux $\left(\bar{\omega}_v = \dfrac{A'_{af}}{bt}\right)$,
$\bar{\omega}_0$, la section relative des barres relevées $\left(\bar{\omega}_0 = \dfrac{A'_{a0}}{bt_0}\right)$,

η_v, η_0 sont des coefficients exprimant la qualité de l'adhérence des étriers et des barres relevées au béton, égaux à 1,0 pour les barres lisses et à 0,7 pour les barres crénelées.

Dans la formule (6.25) le produit $\sigma_a^N \Psi_u$ a une valeur inconnue, qui peut être calculée, d'après BORICHANSKI, pour les barres relevées par la relation empirique

$$\Psi_u \cdot \sigma_a^N = kQ'_a \left(\frac{T^N}{T} \right)^2 . \tag{6.28}$$

Dans cette formule le coefficient k doit tenir compte de la diversité des contraintes dans les étriers, et T est un effort tranchant de rupture, transmis par le béton et par les étriers peu avant l'épuisement de la capacité portante. L'effort T est calculé par la formule (4.8) de BORICHANSKI, présentée précédemment

$$T = \sqrt{0{,}6h^2 b\bar{\sigma}_b q_y}.$$

Pour établir la formule (4.8) on a admis que, dans la phase de rupture, les étriers, où les contraintes atteignent la limite d'élasticité Q_{ae}, transmettent sur l'unité de longueur de la poutre un effort constant

$$q_y = \frac{A'_{af} Q_{ae}}{t} = \bar{\omega}_v b Q_{ae};$$

d'où l'on a

$$Q_{ae} = \frac{q_y}{\bar{\omega}_v b}. \tag{6.29}$$

En portant les relations (4.8) et (6.29) dans la formule (6.28) nous obtiendrons

$$\Psi_u \sigma_a^N = k \frac{1}{0{,}6} \frac{(T^N)^2}{b^2 h^2 \bar{\sigma}_b \bar{\omega}_v}. \tag{6.28a}$$

Si l'on admet, d'après BORICHANSKI, le coefficient expérimental $k = 2{,}4$ et si l'on introduit la notation

$$t_0 = \frac{T^N}{bh},$$

on obtient la formule (6.28a) sous la forme suivante

$$\Psi_u \sigma_a^N = 4{,}0 \frac{t_0^2}{\bar{\sigma}_b \bar{\omega}_v}. \tag{6.28b}$$

En multipliant la résistance de calcul σ'_b par le coefficient 0,55 nous obtenons la résistance σ_b^0, et la formule (6.28b) devient

$$\Psi_u \sigma_a^N = 2{,}2 \frac{t_0^2}{\sigma_b^0 \bar{\omega}_v}. \tag{6.28c}$$

Nous portons la formule (6.28c) dans (6.25) et nous obtenons une formule pour calculer l'ouverture des fissures obliques dans les poutres munies d'étriers verticaux

$$f_u = \frac{2{,}2 t_0^2}{\sigma_b^0 E_a \bar{\omega}_v} l_{fv} \tag{6.30}$$

et dans les poutres munies d'une armature transversale composée d'étriers et de barres relevées

$$f_u = \frac{2{,}2t_0^2}{\sigma_b^0 E_a(\overline{\omega}_v + \overline{\omega}_0)} l_{fv}, \tag{6.31}$$

où l_{fv} est la distance entre les fissures obliques calculée par la formule (6.27).

Le règlement du béton armé du C.A.E.M. indique les conditions suivantes pour les ouvertures admissibles des fissures obliques :

$$\text{pour } T \leqslant 0{,}15\sigma_b^0 bh, \text{ on a } f_u = 0{,}25 \text{ mm},$$

$$\text{pour } T \geqslant 0{,}2\sigma_b^0 bh, \text{ on a } f_u = 0{,}15 \text{ mm}.$$

Ce règlement permet de calculer l'armature transversale par n'importe quelle méthode, à condition que l'ouverture des fissures calculée par la formule (6.31) soit, au maximum, différente de 20 % des valeurs indiquées ci-dessus. Ainsi, d'après cette prescription, la formule (6.31) devient le critère principal pour déterminer si l'armature transversale a été calculée correctement. Par conséquent, il est important que cette formule soit conforme aux résultats expérimentaux, non seulement à ceux qui ont été à la base de sa détermination, mais également à ceux des autres recherches expérimentales. Nous allons vérifier la formule (6.31) d'après les essais de LEONHARDT et WALTHER, caractérisés par leur précision et l'exactitude des mesures.

Les figures 6-45 et 6-46 représentent les diagrammes des ouvertures des fissures obliques en fonction du pourcentage de l'armature transversale, déterminés d'après les essais [53] en employant la formule (6.31). Nous voyons, cependant, que les résultats obtenus d'après le

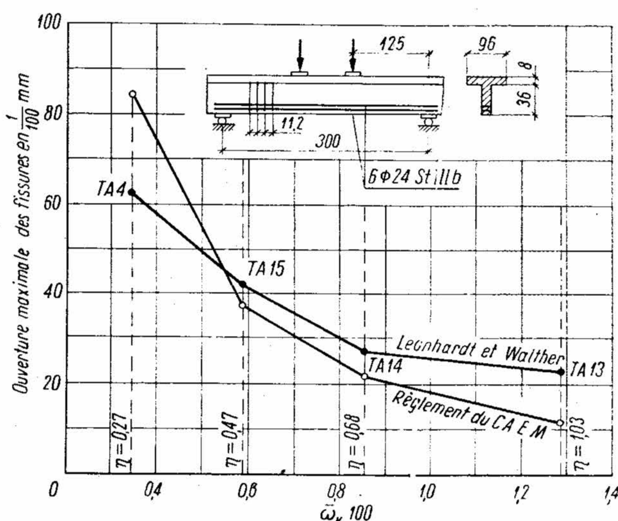


Fig. 6-45. Ouverture des fissures dans les poutres de $\sigma_{wu} = 225$ kgf/cm² d'après la formule du règlement du C.A.E.M. et d'après les essais de LEONHARDT et WALTHER

règlement du C.A.E.M. sont assez différents des valeurs effectives. On trouve une concordance relativement bonne pour le béton de résistance sur prismes $\sigma_{wu} = 225$ kgf/cm^2 avec le cisaillement transmis partiellement par l'armature ($\eta \approx 0{,}5$ à $0{,}8$). Dans le cas d'une armature transversale faible ($\eta \approx 0{,}3$) la formule (6.31) donne une valeur d'ouverture trop élevée de 30 % environ, et dans le cas de $\eta \approx 1{,}0$ on a des valeurs trop faibles de 100 % environ.

Pour le béton de résistance $\sigma_{wu} = 300$ kgf/cm^2 les résultats calculés différaient encore plus des données expérimentales (fig. 6-46).

En vérifiant la formule (6.31) sur les poutres continues représentées dans le tableau 5-8, on a obtenu des résultats analogues. On a constaté que cette formule donnait de meilleurs résultats pour des poutres de section rectangulaire que pour des poutres en forme de T. La formule (6.31) ne peut pas être appliquée pour les poutres armées principalement par des barres relevées avec peu d'étriers, car dans ce cas les différences peuvent atteindre même plus que 300 %.

On peut constater à la fin de cette analyse que d'après les essais de Leonhardt et Walther la formule (6.31) doit être corrigée. Cette correction sera possible sur la base de recherches expérimentales ultérieures, concentrées surtout sur le problème de la morphologie des fissures dans la zone de cisaillement.

Dans les poutres munies d'étriers verticaux ou de barres relevées, les fissures obliques dans la zone de cisaillement ont des ouvertures plus larges que les fissures verticales dans

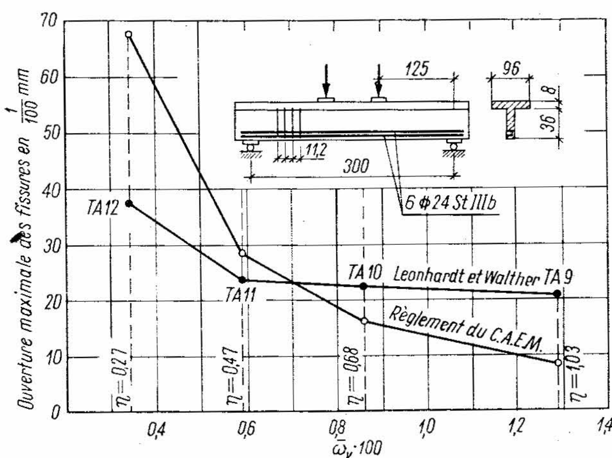


Fig. 6-46. Ouverture des fissures dans les poutres de $\sigma_{wu} = 300$ kgf/cm^2 d'après la formule du règlement du C.A.E.M. et d'après les essais de Leonhardt et Walther

la zone de M_{max}. Cette situation peut être changée par l'emploi d'étriers obliques très serrés. En général, on peut dire que plus l'armature transversale est dispersée dans la section parallèle à l'axe longitudinal de la poutre et plus l'armature est dirigée suivant les contraintes principales de traction, plus petites sont les ouvertures des fissures obliques et, malgré le

fait que le nombre de celles-ci augmente, plus diminue la somme de leurs ouvertures dans la longueur de la zone de cisaillement. Dans ces cas, de même que dans les éléments fléchis, on peut supposer une extensibilité plus élevée des bétons armés, [26]. La saturation d'un élément par des armatures de diamètre important avec le béton mal serré donne des résultats négatifs sous la forme de fissures aux ouvertures très importantes. Ce phénomène a été observé par LEONHARDT dans les poutres continues au voisinage des appuis centraux, où, sous la charge de service, l'ouverture des fissures était de l'ordre de 0,6 mm, donc quatre fois plus grande que dans les travées. La même situation apparaît dans les poutres en forme de T, où, avec des barres sortant de la nervure, on a une concentration considérable de l'armature au-dessus de l'appui. Dans ces cas, afin d'éviter des fissures à ouverture très large, il faut, suivant les indications de LEONHARDT, situer une partie des armatures dans le hourdis en dehors de la nervure (fig. 6-47).

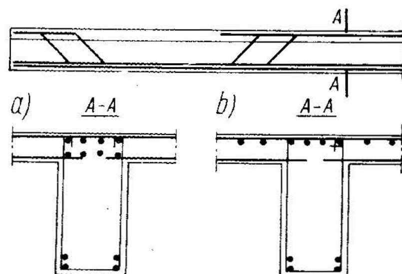


Fig. 6-47. Disposition des armatures principales au-dessus de l'appui d'une poutre continue : a) incorrecte, b) correcte

L'ouverture maximale des fissures obliques dans la zone de cisaillement se manifeste à peu près à mi-hauteur de la nervure ; par contre, au niveau des armatures principales l'ouverture de ces fissures est égale à celle des fissures dues à la flexion. Ce n'est que dans le cas d'un glissement de l'armature principale que l'ouverture des fissures obliques près du bord tendu de la poutre peut atteindre une valeur maximale. L'ouverture des fissures à mi-hauteur de la nervure dépend surtout du pourcentage de cisaillement transmis par l'armature. En conséquence, en admettant des contraintes plus élevées $\tau^1_{0\,max} > \sigma'_1$ il est nécessaire de transmettre entièrement le cisaillement par l'armature.

6.7. FLÈCHES

Le problème des flèches dans les poutres en béton armé, avec la question de la rigidité, est le sujet de recherches théoriques et expérimentales depuis plusieurs années. Dans les éléments dont l'élancement est important c'est le moment fléchissant qui détermine la flèche, et l'influence de l'effort tranchant est insignifiante. C'est pourquoi dans les théories fondamentales de la rigidité des poutres en béton armé de MURACHEV [64] et dans celle, plus récente, de KUCZYŃSKI [45] [46] l'influence de l'effort tranchant sur les flèches a été négligée.

Les éléments en béton armé caractérisés par des contraintes élevées de cisaillement sont le plus souvent courts ; donc la valeur des flèches n'a qu'une très petite influence pratique, et dans l'ouvrage présent ce problème peut être considéré comme secondaire.

La figure 6-48 montre les déformées des poutres *T*1 et *T*2 examinées par LEONHARDT et WALTHER [52] ; les détails de ces poutres ont été indiqués sur la figure 5-80. Dans ces poutres la contrainte de cisaillement sous la charge de service était $\tau_0 = 67$ kgf/cm²,

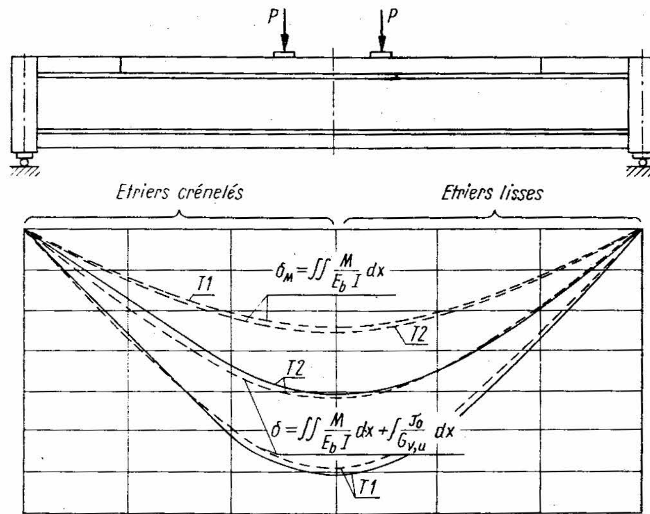


Fig. 6-48. Flèches calculées et mesurées des poutres $T1$ et $T2$ sous la charge $2P = 160$ tf (essais de LEONHARDT et WALTHER)

mais peu avant la rupture dans la poutre $T1$ on a trouvé $\tau_0 = 111$ kgf/cm² et dans la poutre $T2$ $\tau_0 = 160$ kgf/cm². Quand les contraintes de cisaillement sont si élevées, l'influence de l'effort tranchant sur les flèches est presque aussi importante que celle du moment fléchissant. Ceci découle de la figure 6-48, où l'on a indiqué les flèches dues à la flexion pure calculées par la formule

$$\delta_M = \iint \frac{M}{E_b I} dx, \tag{6.32}$$

où : E_b est le module d'élasticité du béton,

I, le moment d'inertie dans la phase II.

Pour les poutres dans la phase II l'influence des glissements sur les flèches ne peut pas être calculée à partir du module de glissement $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Aussi, LEONHARDT préconise-t-il la méthode de DILGER, basée sur l'analogie des treillis. Selon cette méthode, l'angle de glissement Ψ qui caractérise les déformations produites par les contraintes de cisaillement est calculé au moyen du diagramme des déplacements de WILLIOT (fig. 6-49 et 6-50). Ainsi, pour une poutre avec des étriers verticaux, nous obtenons

$$\operatorname{tg}\Psi_v = \Psi_v = \varepsilon_a + 2\varepsilon_b,$$

et pour une poutre avec des étriers obliques

$$\operatorname{tg}\Psi_u = \Psi_u = \varepsilon_a + \varepsilon_b,$$

où : ε_a est la déformation unitaire des étriers,

ε_b, la déformation des bielles en béton, découpées par les fissures obliques.

Par conséquent, les flèches produites par l'effort tranchant sont exprimées par les relations suivantes :
dans le cas des étriers verticaux

$$\delta^v_{T(x)} = \int_0^x \Psi_v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x [\varepsilon_a(x) + 2\varepsilon_b(x)]\,\mathrm{d}x, \tag{6.33}$$

dans le cas des étriers obliques

$$\delta^u_{T(x)} = \int_0^x \Psi_u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x [\varepsilon_a(x) + \varepsilon_b(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{6.34}$$

Dans la zone des valeurs positives de l'effort tranchant l'angle Ψ est muni du signe plus, et dans la zone des valeurs négatives, du signe moins.

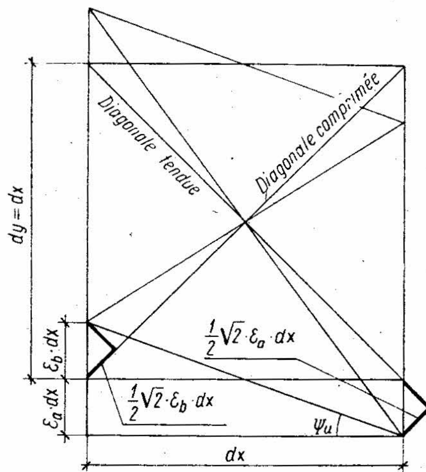


Fig. 6-49. Plan des déplacements de WILLIOT pour des étriers inclinés

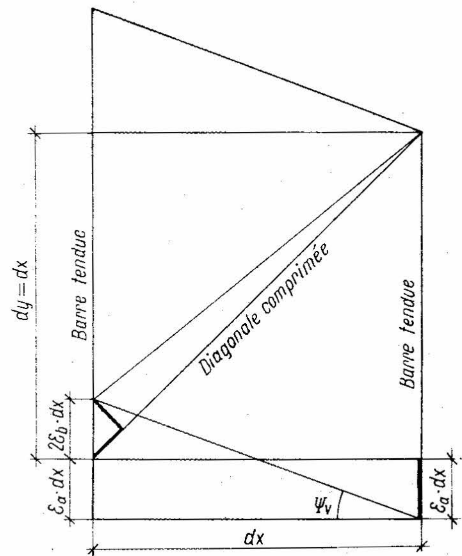


Fig. 6-50. Plan des déplacements de WILLIOT pour des étriers verticaux

On peut admettre approximativement que, conformément à la figure 5-81, nous avons pour les étriers verticaux

$$\sigma_2 \approx 2\tau_0\,; \qquad \left.\begin{aligned} \varepsilon_b &= \frac{2\tau_0}{E_b} \\ \varepsilon_a &= \frac{\tau_0}{\overline{\omega}_v E_a} \end{aligned}\right\} \Psi_v = \tau_0 \left(\frac{1}{\overline{\omega}_v E_a} + \frac{4}{E_b} \right)$$

et pour les étriers obliques

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_2 \approx \tau_0; \quad \varepsilon_b = \dfrac{\tau_0}{E_b} \\ \varepsilon_a = \dfrac{\tau_0}{\bar{\omega}_v E_a} \end{array}\right\} \Psi_u = \left(\frac{1}{\bar{\omega}_v E_a} + \frac{1}{E_b}\right).$$

En utilisant la définition générale du module $G = \frac{\tau}{\Psi}$ nous obtiendrons les modules idéals de glissement :

$$G_v = \frac{\bar{\omega}_v E_a}{1+4n\bar{\omega}_v} \quad \text{dans le cas des étriers verticaux,}$$

$$G_u = \frac{\bar{\omega}_v E_a}{1+n\bar{\omega}_v} \quad \text{dans le cas des étriers obliques.}$$

Finalement, nous obtenons les formules

$$\delta_T = \int \frac{\tau_0}{G_v} \mathrm{d}x \quad \text{ou bien} \quad \delta_T = \int \frac{\tau_0}{G_u} \mathrm{d}x. \tag{6.35}$$

Les flèches totales dues au moment et à l'effort tranchant et calculées d'après les hypothèses susdites correspondent très bien à la déformée effective (fig. 6-48).

Des considérations théoriques et des expériences il résulte que les poutres armées d'étriers verticaux ont des flèches très supérieures à celles des poutres munies d'étriers obliques. La différence des flèches est égale à 35 % sous des charges peu élevées et même 45 % sous des charges importantes. De cette façon, contrairement à la thèse de Leonhardt, l'opinion de MÖRSCH se trouve dans une certaine mesure confirmée : la transmission du cisaillement par des étriers verticaux ne correspond pas à une solution optimale. Ce type d'armature produit après la formation des fissures un déplacement des efforts internes plus important que dans le cas de l'armature suivant les lignes de force, ce qui peut provoquer des perturbations dans la déformée (fig. 6-51). Dans la poutre représentée sur la figure 6-51 la perturbation de la déformée prend la forme de courbes convexes vers le haut, qui se manifestent dans le voisinage de l'appui sous des charges plus élevées. Ces courbures sont produites par le fait que les résultantes N_{bI} et N_{bII} dans les sections *I—I* et *II—II* se trouvent au-dessous du centre de gravité de la section.

La figure 6-52 montre les flèches au milieu des travées en fonction des charges d'après les essais de l'auteur, présentés au paragraphe 5.7. Nous voyons que la flèche d'une poutre en béton de résistance 300 kgf/cm^2 contenant des éléments préfabriqués (*K*-300) est supérieure à celle d'une poutre sans ces éléments. Les poutres en béton plus faible montrent des relations semblables. Ce phénomène peut être probablement expliqué par l'existence des éléments préfabriqués, noyés dans le béton des poutres. Les flèches maximales ont été trouvées cependant dans les poutres en forme de double T, où les contraintes de cisaillement dans l'âme dépassaient largement celles dans les poutres rectangulaires. Ces relations ont été bien mises en évidence surtout dans la série des poutres en béton de résistance 185 kgf/cm^2. Le diagramme de la flèche en fonction de la charge dans les poutres en forme de double T a la forme d'une courbe dès le début, tandis que dans les poutres rectangulaires de la même série le diagramme est linéaire presque jusqu'à la valeur $P = 0{,}75\ P_u$.

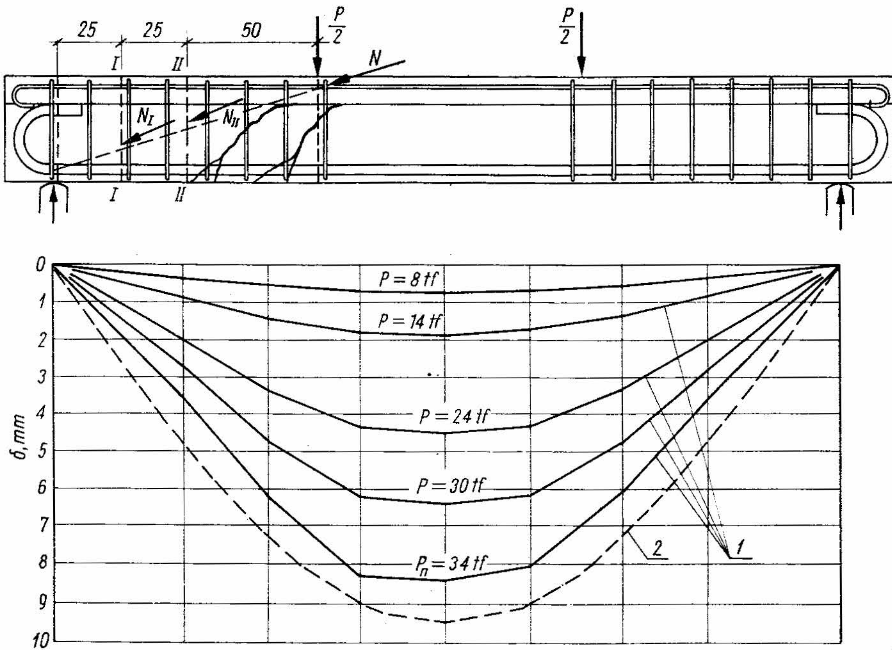


Fig. 6-51. Flèches de la poutre No 503 (DAfE, cahier 10)
1 — flèches effectives, 2 — flèches théoriques pour P = 34 tf

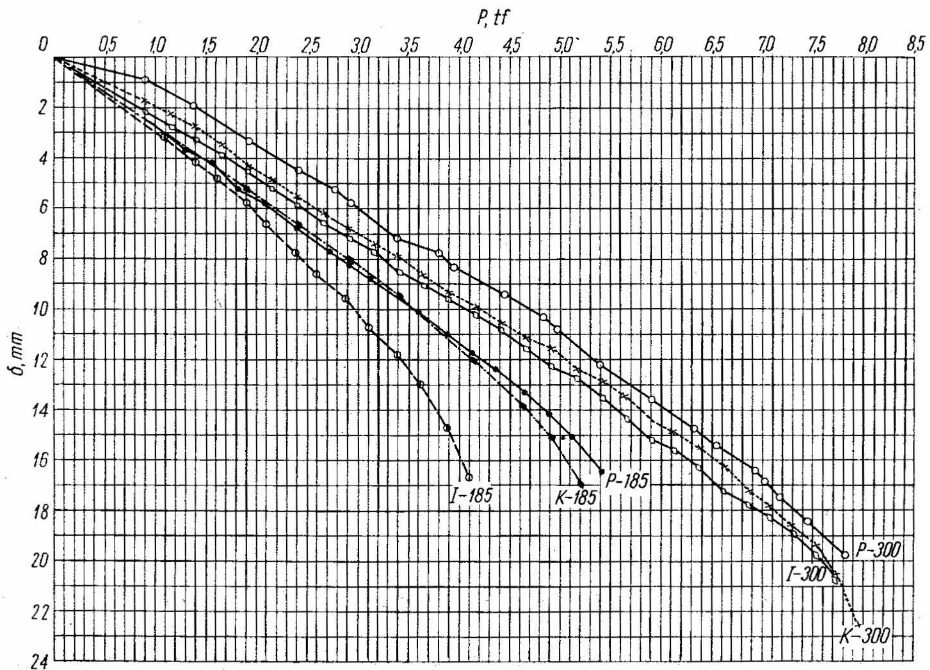


Fig. 6-52. Flèches des poutres dans les essais de l'auteur

Les déformées des poutres à deux travées déterminées dans la série *HQ* des essais [54] (tabl. 5-8) sont représentées sur la figure 6-53. L'armature des poutres était identique, mais la forme de leurs sections était différente, d'où les valeurs de flèches différentes. La figure 6-53 représente les flèches sous la charge $2P = 30$ tf et $2P = 50$ tf ; ces flèches des poutres en forme de T étaient supérieures de 80 % aux flèches des poutres rectangulaires. Sous la charge $2P = 30$ tf une seule poutre *HQ*1 montrait des flèches proches de la déformée théorique, avec une courbure au-dessus de l'appui central ; par contre, les déformées des deux autres poutres en forme de T se caractérisaient par des angles vifs sur cet appui. Sous la charge $2P = 50$ tf la poutre rectangulaire présentait elle aussi un angle vif de la déformée au-dessus de l'appui central.

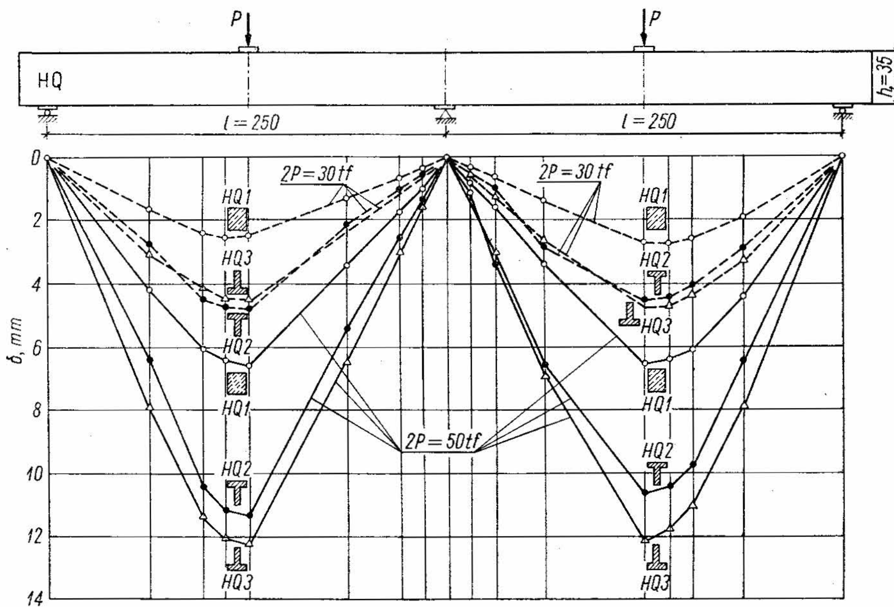


Fig. 6-53. Flèches des poutres à deux travées de sections transversales différentes (essais de LEONHARDT et WALTHER)

Le manque de continuité de la déformée au-dessus de l'appui central est produit, entre autres, par une forte fissuration produite à cet endroit à cause de la concentration de l'armature, d'où une diminution locale de la résistance du béton. Toutefois, la cause principale de la discontinuité de la déformée dans cette zone réside dans les déformations de glissement dues à l'effort tranchant, lesquelles ne produisent pas de rotations réciproques des diverses sections mais conduisent à des déplacements verticaux.

6.8. DÉTERMINATIONS DE LA FORME DE L'ARMATURE TRANSVERSALE

Le problème de l'armature transversale optimale n'a pas été résolu jusqu'à présent. Les opinions ne sont pas concordantes en ce qui concerne le type le plus efficace d'armature

transversale et la disposition de l'armature suivant la longueur de la poutre. Cette dernière question se pose surtout dans les cas de charge continue.

MÖRSCH a réussi en 1925 à introduire dans les règlements allemands une prescription exigeant la transmission totale du cisaillement par l'armature. Ceci était considéré comme peu économique par rapport aux prescriptions du règlement de 1916 en ce qui concerne la consommation d'acier. La figure 6-54 montre l'évolution dans les prescriptions sur la transmission du cisaillement depuis le règlement de la Prusse de 1907, puis le règlement de 1916, jusqu'à cette prescription de DIN de 1925, mentionnée précédemment. MÖRSCH a mis en oeuvre ses thèses en s'appuyant sur les résultats des expériences qui ont indiqué que la transmission du cisaillement par les barres relevées, d'une part, assurait la capacité

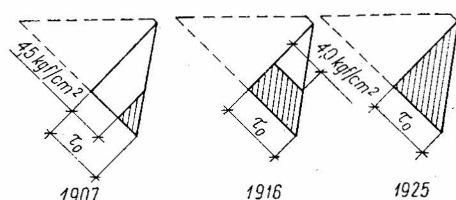


Fig. 6-54. Transmission du cisaillement par l'armature d'après les règlements allemands de 1907, 1916 et 1925

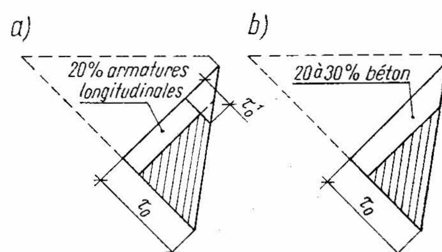


Fig. 6-55. Diagrammes des contraintes de cisaillement pour le dimensionnement de l'armature transversale : a) d'après le règlement polonais PN-56/B-03260, b) d'après le règlement des Etats-Unis

portante la plus élevée et, d'autre part, était la plus économique en ce qui concerne la consommation d'acier. Ce problème a été discuté au paragraphe 5.3.1 où sur la figure 5-41a on a représenté une poutre armée d'après les indications de MÖRSCH. Cette poutre s'est rompue sous la charge $P_u = 75{,}75$ tf, et la poutre munie d'une armature suivant le règlement de 1916 (fig. 5-41b) a subi la rupture sous la charge $P_u = 60{,}55$ tf. De plus, il est à remarquer que dans la première poutre on a utilisé 200 kg d'acier et dans la seconde, de capacité portante inférieure, 227,5 kg d'acier. On ne doit pas cependant généraliser la conclusion de MÖRSCH, car les autres essais ont montré (chapitre 5) qu'on pouvait avoir une capacité portante complète et une consommation économique d'acier également avec le cisaillement partiellement transmis par l'armature. Cela concerne surtout, bien entendu, les éléments en béton de résistance élevée et armés de barres crénelées ; dans ces éléments les contraintes de cisaillement ne sont pas trop importantes. Ces facteurs ainsi que l'influence de l'élancement ont été considérés dans les propositions de LEONHARDT, qui admettent la transmission partielle du cisaillement par l'armature (fig. 5-85).

La figure 6-55a montre le diagramme réduit des contraintes d'après lequel il faut, conformément au règlement polonais, calculer et répartir l'armature transversale suivant la longueur de la poutre. De la comparaison de ce diagramme avec ceux de la figure 6-54 il résulte que c'est une sorte de superposition des deux précédentes prescriptions allemandes.

Dans le règlement des Etats-Unis l'effort oblique de traction est réduit de 20 % et même dans certains cas de 30 %, mais on ne peut pas effectuer de réduction du diagramme des contraintes τ_0 dans la zone de $\tau_0 < \tau_0^1$ (fig. 6-55b). Les réductions du diagramme de τ_0 à la façon polonaise ou américaine ne sont suffisamment justifiées ni théoriquement ni expérimentalement. Les recherches expérimentales indiquent que l'effort tranchant transmis par le béton V_b et par les armatures longitudinales V_a n'est pas constant. En principe, la disposition de l'armature suivant la longueur de la poutre doit dépendre au moins de deux facteurs : l'élancement de cisaillement et la nature de l'appui. Par exemple, dans l'épuisement de la capacité portante d'une poutre simplement appuyée et munie d'une armature transversale, l'endroit de la rupture n'est pas situé (même avec $\bar{\omega}_v$ constant) dans la zone d'appui, mais à 0,37 l de l'appui. Par suite, certains chercheurs comme HAUGLI [33], non seulement ne proposent pas de réduire la zone où $\tau_0 < \tau_0^1$, mais au contraire considèrent que sur un certain segment dans la partie centrale de la travée il faut augmenter artificiellement les contraintes τ_0 (diagramme, fig. 6-56c) et ainsi dimensionner l'armature transversale. BAY a formulé des conclusions semblables d'après les considérations théoriques, présentées au paragraphe 4.4 (fig. 4-12).

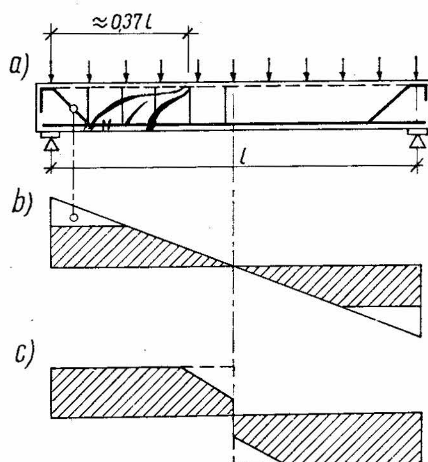


Fig. 6-56. Transmission du cisaillement par l'armature d'après la proposition de HAUGLI [33] : a) fissuration en état de rupture, b) et c) diagrammes des contraintes de cisaillement pour calculer l'armature transversale

On pourrait dire que, puisque depuis si longtemps l'armature transversale a été dimensionnée selon le diagramme réduit des contraintes τ_0 et que cela n'a occasionné, en principe, aucun accident, il est possible de conserver cette méthode ou même de la développer pour économiser davantage d'acier. L'auteur partage l'opinion que dans certains cas il est possible de réduire encore l'armature transversale, ce qui d'ailleurs a été discuté dans les chapitres précédents. Cependant, il ne voit pas la possibilité d'une telle réduction en découpant par des lignes droites d'autres aires du diagramme des contraintes τ_0. Si la tendance à augmenter τ_{0max}^1 se développe, conformément aux suggestions du règlement du C.A.E.M., il devient absolument impossible de conserver le principe du dimensionnement de l'armature selon la figure 6-55a. Les Américains ont eu l'occasion de le remarquer : ils ont réduit le diagramme comme il est indiqué sur la figure 6-55b en admettant simultanément pour la contrainte τ_{0max}^1 une valeur plus élevée que celle indiquée dans le règlement polonais. Comme résultat, il y eut plusieurs catastrophes et, finalement, ces dernières années le problème du cisaillement a été aux Etats-Unis le plus discuté, le plus controversé et le mieux examiné parmi tous les problèmes du béton armé.

Dans l'opinion de l'auteur, aussi bien dans le cas d'une réduction de l'armature transversale que dans le cas où cette réduction n'est pas appliquée, il faut analyser toute la zone

de cisaillement de τ_{0max} à $\tau_0 = 0$. Cette opinion est basée sur plusieurs résultats expérimentaux présentés au chapitre 5. Il suffit, par exemple, d'étudier les résultats indiqués sur la figure 5-76.

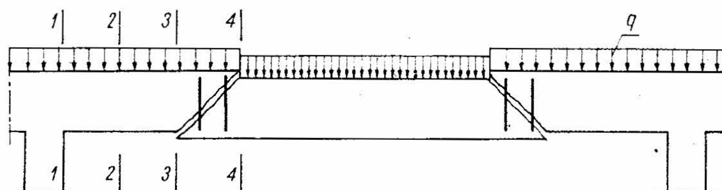


Fig. 6-57. Sections vulnérables dans une poutre continue correspondant aux points où $M_{(x)} = 0$

Dans les poutres continues, en dehors des appuis centraux, qui sont des points faibles dans la zone de cisaillement, il faut examiner l'endroit où $M_{(x)} = 0$. Ici, la résultante des contraintes de compression $N_b = 0$ et, par conséquent, la rupture par le cisaillement, dit pur, est possible (fig. 6-57). Il a été démontré par les essais de RENSAE [67] que dans les endroits où $M_{(x)} = 0$ l'effort tranchant transmis par le béton atteint son minimum, et c'est pourquoi pour éviter une catastrophe il faut prévoir assez d'étriers entre les sections *3 — 3* et *4 — 4* pour que ceux-ci puissent transmettre l'effort tranchant entier qui se manifeste au point où le moment fléchissant change de signe.

En employant la méthode de la capacité portante limite pour calculer la poutre soumise à une charge uniforme il faut déterminer l'armature transversale selon l'équilibre des efforts internes en tenant compte de l'inclinaison la plus défavorable de la fissure oblique. La figure 6-58 représente la disposition de l'armature transversale dans une travée centrale d'une poutre continue, déterminée d'après la méthode de la capacité portante limite, proposée par ERDI [19]. Nous y voyons que ERDI, comme RENSAE, favorise les zones de la poutre où le moment fléchissant change de signe : ces zones sont munies de l'armature transversale la plus forte (l'épaisseur des traits verticaux de la figure 6-58 indique approximativement le pourcentage de l'armature transversale). Dans la zone *III* où l'effort tranchant transmis par les étriers est diminué, ERDI admet une réduction considérable des étriers, mais il préconise simultanément de diminuer les espacements pour qu'au moins deux étriers traversent la fissure oblique, dont l'inclinaison est forte dans cette zone. D'après l'auteur, cette indication de ERDI n'a d'importance pratique que pour les bétons de résistance $\sigma^0_{cyl} \leqslant 140$ kgf/cm².

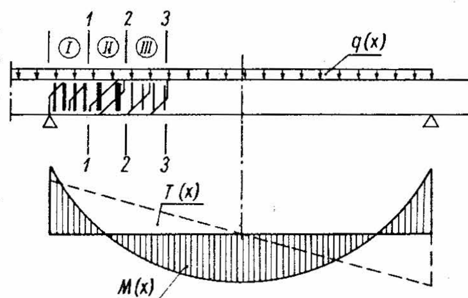


Fig. 6-58. Proposition de ERDI sur la transmission du cisaillement par l'armature dans les zones d'appui de la poutre à travées multiples

L'analyse des résultats des études expérimentales conduit à la conclusion que dans les états limites de flexion, de fissuration et de rupture, non seulement la quantité d'arma-

ture transversale a une importance primordiale, mais également la forme de cette armature. Dans le présent ouvrage on a montré qu'une partie des chercheurs soutenaient le mode d'armature recommandé par MÖRSCH qui préférait toujours l'armature suivant les lignes de force (barres relevées à 45°) à l'armature orthogonale (étriers verticaux). Par contre, LEONHARDT préconise l'armature orthogonale comme plus économique, considérant principalement les frais de main-d'oeuvre. Dans l'opinion de l'auteur, les deux types d'armature présentent des avantages et des défauts ; le choix doit dépendre du type d'élément et des propriétés mécaniques de l'acier et du béton. L'armature orthogonale doit être employée certainement dans les éléments préfabriqués où l'on utilise du béton de haute qualité et le plus souvent de l'acier crénelé. Dans ce cas on ne se risque pas à employer un béton de qualité inférieure à celle prévue dans le projet, et la simplicité de l'armature permet de mécaniser au maximum toutes les opérations. Toutefois, dans les cas où une bonne adhérence n'est pas assurée, donc surtout dans les constructions coulées sur chantier en béton de résistance au-dessous de 200 kgf/cm^2 et armées avec des barres rondes et lisses, les armatures suivant les lignes de force semblent plus justifiées. Pour obtenir toute l'efficacité souhaitée de ce type d'armature il est nécessaire de prévoir des espacements suffisamment petits entre les barres relevées et de maintenir des courbures à grand rayon. La recommandation de MÖRSCH concernant la nécessité d'employer si-

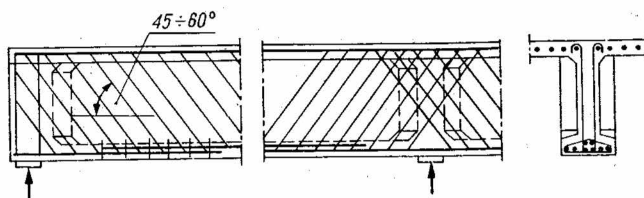


Fig. 6-59. Armature transversale rationnelle d'une poutre à âme mince (d'après LEONHARDT)

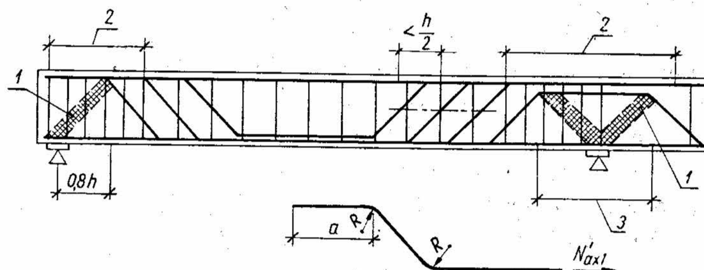


Fig. 6-60. Disposition des barres relevées dans la zone des appuis intermédiaires d'une poutre continue (d'après LEONHARDT)

1 — bielle comprimée en béton, 2 — étriers serrés, 3 — distance égale à 1,6 h où il ne faut pas relever les barres

multanément des étriers avec des barres relevées $\left(\text{le rapport optimal est égal à } \frac{A'_{a0}}{A'_{af}} = 3\right)$ est toujours applicable et très importante.

Les étriers employés avec des barres relevées ou représentant à eux seuls l'armature transversale doivent être prévus avec des espacements aussi petits que possible. Des essais récents il résulte que l'efficacité accrue des étriers serrés est due non seulement à l'amélioration de l'adhérence (diamètre plus petit) mais aussi à la plus grande probabilité qu'ils seront traversés par la fissure oblique et à l'effet de frettage de la zone comprimée. L'effet de frettage, comme celui des frettes en hélice dans les poteaux frettés, provoque l'augmentation de résistance de la zone comprimée du béton. Cela est particulièrement important dans les régions d'appui dans les poutres continues, où le manque de hourdis dans la zone comprimée augmente considérablement les contraintes de compression dans le béton par rapport aux contraintes dans les travées.

Il est utile de rappeler ici quelques détails du dimensionnement de l'armature transversale, proposés par LEONHARDT comme résultat de l'observation de la fissuration et de la rupture des poutres.

La figure 6-59 montre l'armature transversale d'une poutre continue composée d'étriers inclinés de 45° à 60°. Ce type d'armature est surtout préconisé dans les poutres à âme très mince où les contraintes de cisaillement sont $\tau_0 \geqslant 0{,}1\sigma^0_{cyl}$.

La figure 6-60 représente l'armature d'une poutre continue, composée d'étriers et de barres relevées. La première barre relevée est située plus loin de l'appui, et c'est une innovation ; cette distance est égale à 0,8 h environ. La distance entre les barres relevées, qui doivent être groupées par deux et situées symétriquement dans chaque section, ne peut pas dépasser 0,5 h. En utilisant de l'acier à haute résistance, un rayon de courbure suffisamment grand, $R > 15\ d$, est obligatoire, (fig. 6-60). La longueur de scellement a d'une barre relevée (fig. 6-60) doit être calculée par la formule

$$a = \frac{0{,}5N'_{ax1}}{\pi d\tau_d}.$$

La figure 6-61a montre l'armature transversale d'une poutre chargée par une force concentrée élevée, située près de l'appui. Cette armature, selon LEONHARDT, est incorrecte. Dans son opinion, l'armature orthogonale est meilleure dans ce cas (fig. 6-61b), car toutes

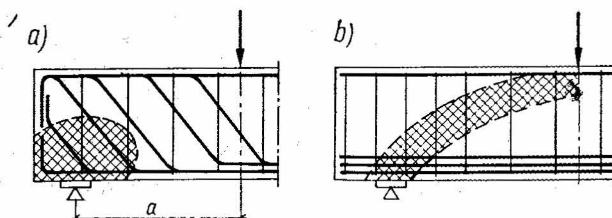


Fig. 6-61. Armature de la zone d'appui avec une force concentrée située près de l'appui : a) armature incorrecte, b) armature correcte

les barres longitudinales sont conduites jusqu'à l'appui et les contraintes principales de traction sont transmises par les étriers verticaux.

La figure 6-62 représente l'armature préconisée par LEONHARDT pour des semelles de fondation continues.

La figure 6-63 concerne la zone de cisaillement d'une poutre où l'on a montré comment il faut, d'après LEONHARDT, disposer les abouts des armatures principales.

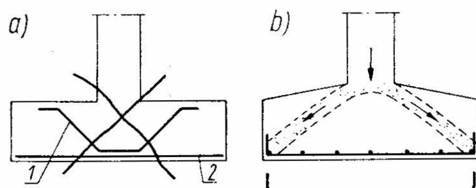


Fig. 6-62. Armature des semelles de fondation : a) incorrecte, b) correcte
1 — barre inutile, 2 — possibilité de glissement

La figure 6-64 montre une armature transversale de l'appui central, incorrecte. Il s'agit ici de l'emploi de barres telles que celle qui est indiquée par un trait épais. Les essais ont prouvé que ces barres accéléreraient l'épuisement de la capacité portante, lequel résulte de la formation des fissures horizontales près du bord inférieur, dues aux efforts obliques de compression dans les bielles en béton (zones hachurées, fig. 6-64).

Pour finir, il faut mentionner les essais effectués en 1970 à l'Ecole Polytechnique de Łódź par A. CZKWIANIANC. Ces essais ont prouvé que la forme de l'armature longitudinale a une influence importante sur la capacité portante de la zone d'appui, et surtout sur la fissuration de celle-ci.

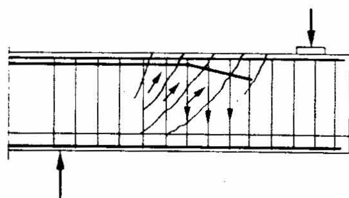


Fig. 6-63. Disposition avantageuse des abouts des armatures principales dans la zone de cisaillement (d'après LEONHARDT)

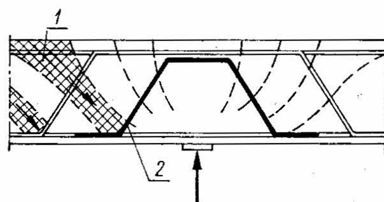
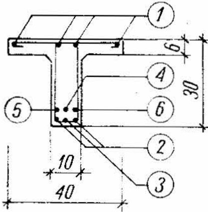


Fig. 6-64. Armature incorrecte dans la zone d'un appui intermédiaire avec des barres en forme de chapeau
1 — bielle comprimée en béton, 2 — barre en forme de chapeau

On a constaté d'une façon indiscutable que cette capacité portante était diminuée dans les cas où, le cisaillement étant transmis partiellement par l'armature, les barres longitudinales étaient réduites conformément au diagramme des moments, augmenté des longueurs $\frac{h}{2} + 15\,\varnothing$ au-delà des points théoriques où ces barres étaient calculées.



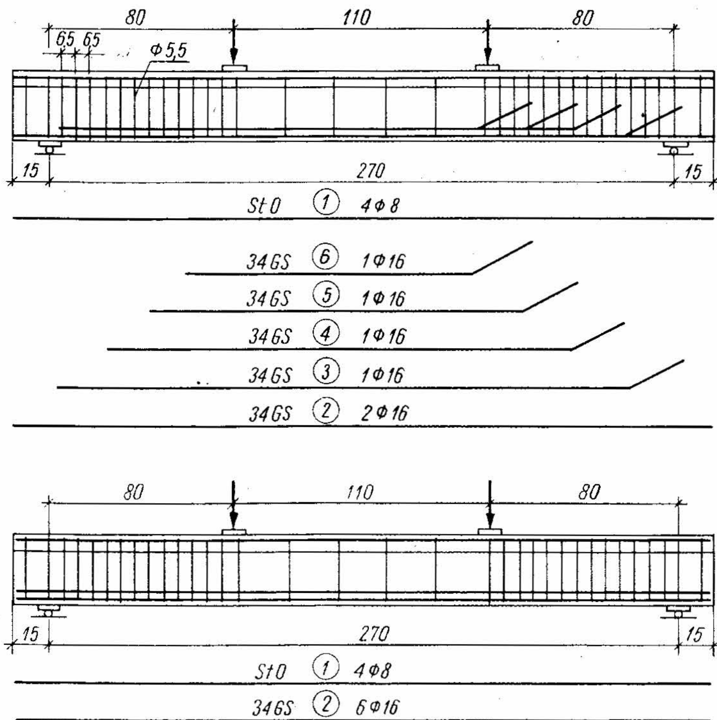


Fig. 6-65. Poutres avec des barres principales peu relevées dans les essais de A. CZKWIANIANC (Łódź, 1970)

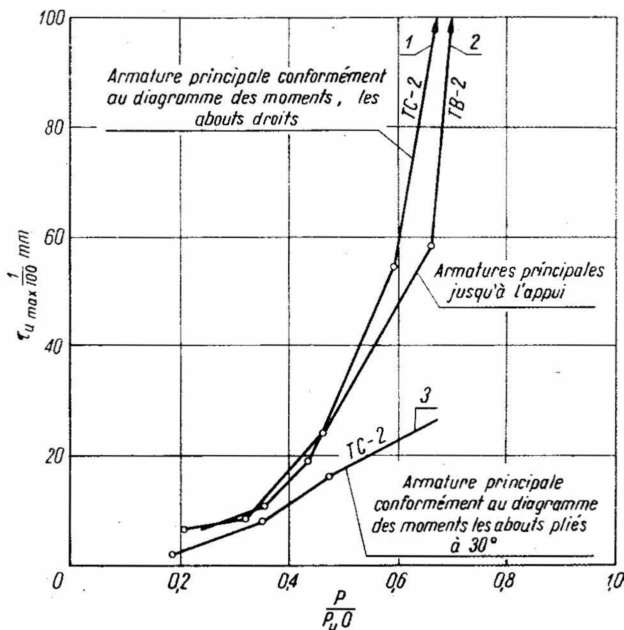


Fig. 6-66. Contraintes dans les étriers des poutres de A. CZKWIANIANC, tracées d'après la figure 6-65

A. CZKWIANIANC a montré l'influence très positive des abouts des barres inclinés de 20° à 30° (fig. 6-65), selon ce que LEONHARDT a proposé. D'après les expériences, ces barres augmentent la capacité portante de la poutre relativement au cisaillement, lorsque l'effort tranchant n'est que partiellement transmis par l'armature ($\eta = 0,3$). Cette augmentation est égale à 20 % environ. Les ouvertures des fissures sont diminuées ainsi plus que deux fois, ce qu'on voit très nettement sur le diagramme de la figure 6-66.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BACH C., GRAF O. : *Versuche mit Eisenbeton-Balken zur Ermittlung der Widerstandsfähigkeit verschiedener Bewehrung gegen Schubkräfte. DAfE*, Heft 10/1911.

[2] BACH C., GRAF O. : *DAfE*, Heft 20/1912.

[3] BACH C., GRAF O. : *DAfE*, Heft 12/1911.

[4] BACH C., GRAF O. : *DAfE*, Heft 48/1921.

[5] BAY H. : *Schubbewehrung und Bruchsicherheit beim Stahlbeton-balken.* — Beton u. Stahlbeton, no 7/1957.

[6] BAY H. : *Schubbruch und Biegemoment.* — Beton u. Stahlbeton, no 10/1960.

[7] BAY H. : *Biegung und Querkraft beim Verbundquerschnitt.* — Beton u. Stahlbeton, no 10/1960.

[8] BAY H. : *Die Schubsicherung im Vorschlage für die neuen deutschen Bestimmungen.* — CEB Bulletin d'Information, no 42, Paris 1964.

[9] BHAL N. S. : *Über den Einfluss der Balkenhöhe auf die Schubtragfähigkeit von einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung*, Dissertation, Universität Stuttgart 1968.

[10] BOGATKIN. J. L., ZALESOV A. S. : *Calcul des éléments en béton armé soumis à un effort tranchant* (en russe). — Beton i Zhelesobeton, no 7/1963.

[11] BORICHANSKI M. S. : *Calcul des barres relevées et des étriers dans les éléments fléchis en béton armé en état de rupture* (en russe), Stroizdat, Moscou 1946.

[12] BÖKER R. : *Die Mechanik des bleibenden Formänderung in kristalisch aufgebauten Körpern.* — Mitteilungen über Forschungsarbeiten, VDJ, Heft 175/176 — 1915.

[13] BRESLER B., PISTER K. S. : *Failure of plain concrete under combined stresses.* — Transactions of the American Society of Civil Engineers, no 122/1957.

[14] BRESLER B., PISTER K. S. : *Strength of concrete under combined stresses.* — ACJ Journal, September 1958.

[15] BUKOWSKI B. : *Morphologie des fissures dans les structures en béton armé* (en polonais). — Archiwum Inżynierii Lądowej, vol. III, no 4/1957.

[16] CLARK A. P. : *Diagonal Tension in Reinforced Concrete Beams.* — ACJ Journal, Proceedings 48 —1951.

[17] DABROWSKI K. : *Dimensionnement de l'armature pour l'effort tranchant d'après le projet d'un règlement du béton armé PN-03/120* (en polonais), — Inżynieria i Budownictwo, no 5/1967.

[18] DOROCHKEVITCH L. A. : *Participation de l'armature longitudinale dans le dimensionnement des poutres en béton armé vis-à-vis de l'effort tranchant*, (en russe). — Nautchnye Zapiski, Lvovski Polit. Inst., 1959.

[19] ERDI C. : *Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear and Bending.* — CEB Bulletin d'Information, no 42, Paris, Juillet 1964.

[20] FÖPPL A. : *Mitteilungen aus dem Mech.-Techn.* Laboratorium der Königl. — Techn. Hochschule München, Heft 27/1900.

[21] GENIJEV G. A., KISSYUK V. N. : *Sur la justification d'une condition de la résistance du béton* (en russe), — Beton i Zhelesobeton, no 12/1962.

[22] GENIJEV G. A., KISSYUK V. N. : *Sur le problème de la généralisation de la théorie de la résistance du béton* (en russe), Beton i Zhelesobeton, no 2/1965.

[23] GODYCKI-ĆWIRKO T. : *Recommandations pour le dimensionnement des poutres-maîtresses à une travée avec les poutres préfabriquées incorporées des planchers-dalles* (en polonais). — Inżynieria i Budownictwo, no 10/1964.

[24] GODYCKI-ĆWIRKO T. : *Cisaillement dans les poutres-maîtresses en béton armé affaiblies par des poutres préfabriquées incorporées* (en polonais), — Inżynieria i Budownictwo, no 1/1963.

[25] GODYCKI-ĆWIRKO T. : *Dimensionnement des poutres-cloisons en béton armé en phase II d'après l'analyse des contraintes, de la formation des fissures et de la capacité portante* (en polonais), — Archiwum Inżynierii Lądowej, vol. IX, no 3/1963.

[26] GODYCKI-ĆWIRKO T. : *Recherches sur la fissuration dans les éléments fléchis en béton armé* — Béton Armé, no 44/1962.

[27] GŁOMB J. : *Résistance et déformabilité du béton soumis à une compression bi-axiale* (en polonais). — Archiwum Inżynierii Lądowej, vol. IV, no 1/1958.

[28] GŁOMB J. : *Etude de la résistance du béton dans les dalles* (en polonais). — Archiwum Inżynierii Lądowej, vol. X, no 3/1964.

[29] GRAF O. : *DAfE*, Heft 58/1928.

[30] GRAF O. : *DAfE*, Heft 67/1931.

[31] GYENGÖ T. : *Calcul de l'armature transversale dans les poutres en béton armé fondé sur la théorie de la plasticité*, (en hongrois), Budapest 1957.

[32] GOSCHY B., BALAZS Gy. : *Grenzzustand der auf Biegung und gleichzeitigen Schubbeanspruch Stahlbetonquerschnitte.* — Acta Technika Academiae Scientiarum Hungaricae, vol. XXXIV, 1961.

[33] HAUGLI F. R. : *Stahlbetonbalken bei gleichzeitiger Einwirkung von Querkraft und Moment.* DAfSt, Heft 145/1962.

[34] HILSDORF H. : *Die Bestimmung der zweiachsigen Festigkeit des Betons.* DAfSt, Heft 173/1965.

[35] HOGNESTAD E., HANSON N., MCHENRY D. : *Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design.* — ACI Journal, December 1965.

[36] HRUBAN K., HRUBAN J. : *Schubbewehrung von Stahlbetonbalken bei Berechnung nach Grenzzuständen.*— Bauplanung-Bautechnik, no 3/1963.

[37] HUBER M. T. : *Czasopismo Techniczne*, Lwów 1904 ou Teoria Sprężystošci, vol. I, p. 137, Kraków 1948.

[38] JÄGER K. : *Schubbruckgefahr und Schubsicherung in biegebeanspruchten Stahlbetonbalken.* — Tor-Isteg Corporation. Luxemburg, Heft 25.

[39] JANSEN V. P. : *Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams as Related to the Plasticity Ratio of Concrete.* — University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin no 345.

[40] JONES R. : *The Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams in Shear.* — Magazine of Concrete Research, vol. 8, no 23, pp. 69-84.

[41] IZOTOV J. L. : *Etude du comportement des poutres en béton armé soumises à un effort tranchant* (en russe). Izviestia Vyschyh Utchebnyh Zaviedieni (Stroitelstvo i Architektura, no 8/1964).

[42] KARMAN T. : *Festigkeitsversuche unter allseitigen Druck.* — VDJ Vorschungsheft 303/1915. Mitteilung über Forschungsarbeit VDJ-Heft 118, 1912.

[43] KANI G. N. J. ; *The Riddle of Shear Failure and its Solution.* — ACI Journal, April 1964.

[44] KREFELD W. J., THRUSTON C. W. : *Studies of the Shear and Diagonal Tension Strength of Simply Supported Reinforced Concrete Beams.* — Columbia University, Department of Civil Engineering and Engineering Mechanics. New York, June 1962.

[45] KUCZYNSKI W. : *Bases de l'hypothèse des variations linéaires de rigidité de la poutre en béton armé pendant son chargement* (en polonais). — Archiwum Inżynierii Lądowej, no 3/1961.

[46] KUCZYNSKI W. : *Nouvelle théorie des variations de la rigidité des poutres en béton armé.* Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. Paris, Février 1965, No 206.

[47] *Kupfer H.* : *Erweitung der Mörsch'schen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips von Minimum der Formänderungsarbeit.* — Bulletin d'Information CEB, Paris, no 40/1964.

[48] LAUPA A., SIESS C. P., NEWMARK N. M. : *Strength in Shear of Reinforced Concrete Beams* — University of Illinois, Engineering Experiment Station Bulletin, no 428.

[49] LEON A. : *Über das Mass der Anstrengung bei Beton.* — Ing. Archiv., vol. IV, p. 421, 1933.

[50] LEON A. : *Über die Rolle des Trenbruches in Rahmen der Möhr'schen Anstrengungshypothese.* — Der Bauingenieur, no 31/32 — 1943.

[51] LEONHARDT F., WALTHER R. : *Schubversuche an einfeldigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung.* DAfSt, Heft 151/1962.

[52] LEONHARDT F., WALTHER R. : *Versuche an Plattenbalken mit hoher Schubbeanspruchung.* DAfSt, Heft 152/1962.

[53] LEONHARDT F., WALTHER. R. : *Schubversuche an Plattenbalken mit unterschiedlicher Schubbewehrung.* DAfSt, Heft 156/1963.

[54] LEONHARDT F., WALTHER. R., DILGER W. : *Schubversuche an Durchlaufträgern,* DAfSt, Heft 163//1964.

[55] LEONHARDT F. : *Die verminderte Schubdeckung bei Stahlbeton-Tragwerken.* — Der Bauingenieur, no 1/1965.

[56] LEONHARDT F., WALTHER R., DILGER W. : *Schubversuche an indirekt gelagerten einfeldringen und durchlaufenden Stahlbetonbalken,* DAfSt, Heft 201/1968.

[57] MCHENRY D., KARNI J. : *Strength of concrete under combined tensile and compressive stress.* — ACI Journal, April 1958.

[58] MOHR O. : *Die Schubfestigkeit des Betons.* — Armierter Beton, no 7/1911.

[59] MOODY K. : *An investigation of reinforced concrete beams failing in shear.* Ph. D. Thesis, University of Illinois, 1953.

[60] MOODY K., VIEST I., ELSTNER R., HOGNESTAD E. : *Shear strength of reinforced concrete beams.* P. I, Tests of simple beams. — ACI Journal, 26/1954, 1/1955, pp. 417–434, 525–539, 697–730.

[61] MORETTO O. : *An investigation of the strength of welded stirrups in reinforced concrete beams* — ACI Journal, Procedings 42.

[62] MORROW J., VIEST J. : *Shear strength of reinforced concrete frame members without web reinforcement.* — ACI Journal, vol. 28, no 9/1956.

[63] MÖRSCH E. : *Der Eisenbetonbau,* vol. I. Verlag von K. Wittwer, Stuttgart 1929.

[64] MURACHOV V. I. : *Résistance à la fissuration, rigidité et résistance à la rupture du béton armé.* Machinstroizdat, Moscou 1940.

[65] PALOTAS L. : *Die Schubsicherheit und die Bruchtheorie im Stahlbeton.* Technische Universität für Bauwesen und Verkehrswesen. Budapest 1964.

[66] RAUSCH E. : *Zur Schubsicherung im Stahlbetonbau.* — Bulletin d'Information CEB, no 41/1964.

[67] RENSAA E. M. : *Shear Diagonal tension and Anchorage in Beams.* ACI Journal, vol. 30, no 6/1958.

[68] *Richart-Bulletin no* 166, *Richart an Larson-Bulletin no* 175. Engineering Experiment Station of the University of Illinois, Urbana 1927/1928.

[69] ROBINSON J. R. : *La résistance à l'effort tranchant des poutres en béton armé,* CEB, April 1962.

[70] ROBINSON J. R. : *Rupture-Résistance, Dispositions Constructives* Bulletin d'Information CEB, no 41//1964.

[71] ROŠ M., EICHINGER E, : *Die Bruchgefahr fester Körper.* Bericht no 172 der EMPA, Zurich 1949.

[72] RÜSCH H., HAUGLI F. R., MAYER H. : *Schubversuche an Stahlbeton Rechteckbalken mit gleichmässig verteilter Belastung.* DAfSt. Heft 145.

[73] RÜSCH H. : *Über die Grenzen der Anwendbarkeit der Fachwerkanalogie bei der Berechnung der Schubfestigkeit von Stahlbetonbalken.* Festschrift Prof. Ing. F. Campus AMICET ALUMNI, 1964.

[74] RÜSCH H., REHM E. : *Notes on crack spacing in members subjected to bending.* RILEM Symposium, Stockholm 1957, vol. II, p. 525.

[75] RÜSCH H., BAUMAN T. : *Schubversuche mit indirekter Krafteinleitung.* DAfSt Heft 210/1970.

[76] SALIGER R. : *Schubwiderstand und Verbund in Eisenbetonbalken.* Springer-Verlag, Berlin 1913.

[77] SLATER W. A., LORD A. R., ZIPPRODT R. R. : *Shear tests of reinforced concrete beams.* — Technologic papers of the Bureau of Standards, no 314/1926.

[78] TAUB J. : *Die Lage der Nullinie im Schubberich des Stahlbetonsbalken,* — CEB Bulletin d'Information, no 40/1960.

[79] WALTHER R. : *Über die Beanspruchung der Schubarmierung von Eisenbetonbalken,* Schwiezerisch Bauzeitung 1956, no 1, 2, 3.

[80] WALTHER R. : *The ultimate strength of prestressed and conventionally reinforced concrete under combined action of moment and shear.* Lehigh University Fritz Laboratory Report 223, 17 October 1957.

[81] WALTHER R. : *Über die Berechnung der Schubtragfähigkeit von Stahl- und Spannbetonbalken.* — Beton u. Stahlbeton, no 11/1962.

[82] WATSTEIN D., MATHEY R. G. : *Strains in having diagonal cracks* — Journal of the American Concrete Institute, v. 30, no 6/1958. (Proceedings v. 55).

[83] WEIGLER H., BECKER G. : *Untersuchungen über das Bruch und Verformungsverhalten von Beton bei zweiachsiger Beanspruchung.* DAfSt. Heft 157.

[84] WHITNEY C. : *Ultimate Shear Strength of Reinforcement Concrete Flat Slab, Footings. Beams and Frame Members without Shear Reinforcement.* — ACI Journal, no 4/29, 1957.

[85] VIERGIN K. P. : *Résistance du béton sous l'action simultanée de compression et traction* (en russe). — Beton i Zhelezobeton, nos 2/1956 et 10/1960.

[86] VISY Z. : *Berechnung des Kleinsten Bewehrungsquerschnitts von Stahlbetonbalken auf Grundlage des Bruchzustandes.* — Bauplanung-Bautechnik, no 3/1960.

[87] *Règlements pour les projets des structures en béton et béton armé* (en russe), Conseil d'Assistance Economique Mutuelle C.A.E.M., Commission Permanente du Bâtiment, 1963.

[88] DIN 1045 : *Beton und Stahlbetonbau — Bemessung und Ausführung* (Entwurf 1968).

[89] DIN 4224 : *Neubearbeitung von DIN* 4224 — *Bemessung im Beton und Stahlbetonbau* (Vorschlag 1968).

Dépôt légal n° 7536 3e trimestre 1972

Imprimé en Pologne